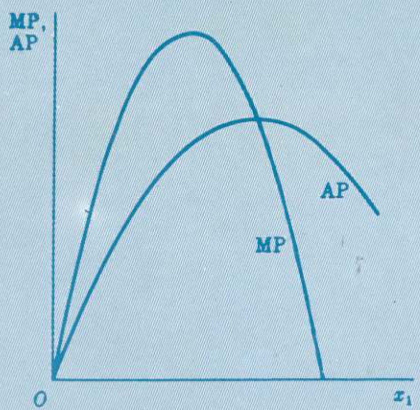
درآمدی بر

اقتصاد تولید کشاورزی

پی. ال. سانخایان



ترجمه:

نعمت الله اکبری   محسن رنانی

بسم الله الرحمن الرحیم

درآمدی بر

اقتصاد تولید کشاورزی

سانخایان

ترجمه:

نعمت‌الله اکبری   دکتر محسن رنانی

این کتاب ترجمه‌ای است از :

Introduction to the Economics of Agricultural Production

P.L. SANKHAYAN

Senior Farm Econimist,
Department of Economics and Sociology
Punjab Agricultural University, Ludhiana

Prentice Hall of India

نشر هشت‌بهشت

(اصفهان، صندوق پستی ۱۷۴-۸۱۴۶۵)

درآمدی بر اقتصاد تولید کشاورزی

سانخایان، پ . ال

ترجمه : اکبری، نعمت‌الله ـ رنانی، محسن

چاپ اول : ۱۳۷۵

تیراژ : ۱۵۰۰

حروفچینی : اندیشه

لیتوگرافی و چاپ : نهضت

فهرست منابع

پیشگفتـــــار

کتاب حاضر متن درسی مقدماتی است دربارهٔ اقتصاد تولید کشاورزی، که در آن برای تحلیل مسائل اقتصادی گوناگون پیرامون تولید کشاورزی ـ عمدتاً در سطح خرد ـ از روش تابع تولید استفاده شده است. مطالب این کتاب با سطح مقدماتی شروع می‌شود و تا سطوح پیشرفته‌ای توسعه می‌یابد. موضوعات این کتاب در اصل به عنوان کتاب درسی برای دانشجویان دوره‌های بالاتر از لیسانس در رشته‌های اقتصاد کشاورزی، اقتصاد و نیز به عنوان مرجعی برای پژوهشگران تدوین شده است.

تدوین و مباحث این کتاب بر پایه مطالبی است که نگارنده از ۱۹۸۲ به بعد در دانشگاه کشاورزی پنجاب[1] درباره اقتصاد تولید برای دانشجویان دوره‌های بالاتر از لیسانس تدریس کرده است و برای یک دوره آموزشی سه ماهه یا حداکثر برای یک نیمسال کفایت می‌کند. در سراسر این کتاب به گونه گسترده‌ای از ریاضیات ساده بهره گرفته شده است و برای مطالعه آن، تنها آگاهی از جبر، حساب و نظریه اقتصاد لازم است.

این کتاب دارای ۸ فصل است که در پایان برخی از آنها تمرین‌هایی نیز گنجانده شده است. این تمرین‌ها همراه با «منابع برای مطالعه بیشتر»، برای خوانندگانی در نظر گرفته شده است که می‌خواهند آن موضوع را عمیق‌تر بررسی کنند.

روشی که در این کتاب به کار گرفته شده، نسبتاً ساده و روشن است. فصل اول خواننده را وارد موضوع می‌کند. در فصل دوم مفاهیم و استنتاج‌های مربوط به موضوع ارائه می‌شوند. فصل سوم به بحث دربارهٔ موضوعات گوناگون مربوط به مدل اقتصادی اختصاص دارد ـ از جمله تصریح[2]، جمع‌آوری داده و دشواریهای اندازه‌گیری. در فصل چهارم انواع گوناگون توابع تولید همراه با مشتقات مناسب و مفید مربوط به هر کدام از آنها، به تفصیل مطرح می‌شوند. تمرکز فصل پنجم بر روش جدید تابع سود برای مطالعه محیط تولید[3] می‌باشد. فصل ششم به بررسی شیوه‌های بهینه‌سازی می‌پردازد. این شیوه‌ها بسط می‌یابد تا در فصل هفتم جنبه‌هایی از عامل زمان در آنها گنجانده شود. سرانجام در فصل هشتم یک تحلیل مقدماتی برای بهینه‌سازی در شرایط ریسک و عدم اطمینان، ارائه می‌شود.

از دیدگاه نگارنده، کتاب حاضر دارای جهت‌گیری نظری است. با این وجود، استادان باید آن را با مطالعات مکمل از مجلات و کتابهای مختلف تکمیل کنند.

پ. ل. سانخایان

---

1 . *Punjab Agricultural University* 2 . *Specification*

3 . *Production environment*

فصل اول

مقدمه

اقتصاد تولید کشاورزی[1]، شاخه‌ای از اقتصاد است که تولید را در صنعت مزرعه‌داری[2] مورد بررسی قرار می‌دهد. این شاخه از علم اقتصاد، در پی یافتن اصول کلی مربوط به تخصیص نهاده‌های زمین،کار، سرمایه و مدیریت است که دارای مقادیر کمیاب و کاربردهای جانشین هستند و همچنین به منظور دست‌یابی به اهدافی معین ـ همچون حداکثر سود، رفع نیاز، یا ترکیب از آن دو ـ در سطح خرد یا کلان می‌باشد. هرگاه مسائل مورد بررسی در سطح خرد باشند ـ مانند مسائلی که در سطح مزرعه مطرح است ـ معمولاً آن را «مدیریت مزرعه»[3] می‌نامند. به هر حال تمایز میان اقتصاد تولید کشاورزی و مدیریت مزرعه بسیار ظریف است.

این شاخه از اقتصاد، خود را به محیط ایستا و بدون ریسک منحصر نمی‌کند ـ که این کار، ساده سازی بیش از حد دنیای واقعی است ـ بلکه تجزیه و تحلیل محیط‌های تولیدی با شرایط پویا و مخاطره‌آمیز را نیز دربر می‌گیرد.

۱-۱- موضوع پژوهش[4]

اقتصاد تولید کشاورزی، جنبه‌های مختلف استفاده از منابع را مورد بررسی قرار می‌دهد. برخی از زمینه‌های مهمی که در هر دو سطح خرد و کلان مورد بررسی قرار می‌گیرند، عبارتند از :

الف) سهم عوامل[5]

بررسی سهم نسبی درآمد عوامل مختلف تولید، به ویژه سهم سرمایه و نیروی کار، مهمترین موضوع مورد علاقه اقتصاددانان تولید در دو بخش کشاورزی و صنعت است. از دیدگاه سیاست‌گذاری، با توجه به اهداف معین همچون بهبود توزیع درآمد ـ از طریق کاهش

---

1 Economics of Agricultural production

2 . Farming Industry

3 . Farm Management

4 . Subject Matter

5 . Factor shares

شکاف میان فقرا و اغنیا ـ می‌توان بر اهمیت چنین مباحثی، در دو سطح خرد و کلان، تأکید کرد.

ب) بازده‌های نسبت به مقیاس[1]

مطالعه نوع بازده‌های نسبت به مقیاس، دیگر هدف مهم اقتصاددانان تولید است. بازده‌های نسبت به مقیاس با این مسأله سر و کار دارند که وقتی تمامی عوامل تولید بطور همزمان افزایش یابند، چه اتفاقی می‌افتد، بنابراین مسأله بازده نسبت به مقیاس یک مسأله بلندمدت است. گذشته از این که مسأله بازده نسبت به مقیاس با فرض نئوکلاسیکی حداکثرسازی سود مرتبط است، ابزار مفیدی نیز برای تعیین چشم‌اندازهای رشد بلند مدت در کشاورزی است.

پ) جانشینی عوامل[2]

امکان جانشینی بین عوامل مختلف تولید نیز همواره دارای اهمیت زیادی است. درجه قابلیت جانشینی بین عوامل تولید، در طول زمان تغییر می‌کند. درجه جانشینی تعیین می‌کند آیا فرآیند رشد کشاورزی خنثی یا غیرخنثی است، بسته به اینکه نرخهای جانشینی بین عوامل ثابت باشند یا اینکه تغییر کنند. در یک محیط اقتصادی[3] که نسبتهای عوامل متغیرند، سهمی که از تولید میان عوامل توزیع می‌شود، عمدتاً از درجه قابلیت جانشینی بین آنها متأثر می‌شود. در فرآیند رشد اقتصادی، این گونه پارامترها، شاخص‌های مهمی هستند که رفتار قیمت نسبی عوامل[4] و تعلق نهایی مالیاتها (وقوع مالیاتی)[5] را تعیین می‌کنند.

ت) سهم عوامل و بازده‌های نسبت به مقیاس

همواره ممکن است بخواهیم رفتار سهم عوامل را همراه با تغییر در مقیاس بدانیم.

ث) تحول فنی[6]

در تولید کشاورزی و فرآیند رشد، تحولات فنی را نیز می‌توان بررسی نمود. در این زمینه، دو نوع تحول فنی، تجسم یافته و تجسم نیافته[7] را می‌توان مورد مطالعه قرار داد. افزایش بازدهی در نتیجهٔ تغییر در شکل کالاهای سرمایه‌ای نوع تجسم‌یافته تحول فنی است.

---

1 . *Returens of Scale*

2 . *Factor Subtitution*

3 . *Economic Environment*

4 . *Factors price Behaviour*

5 . *Incidence of Taxes*

6 . *Technical change*

7 . *Embodied and Disembodied*

تغییرات کمتر محسوس اما کاملاً مهمی نیز می‌تواند با نوآوری در سازمان تولید ایجاد شود، که این تغییرات در شکل کالاهای سرمایه‌ای تجسم نمی‌یابد، به این نوع تغییرات تحول فنی تجسم‌نیافته می‌گویند. برای مثال شناسایی و استفاده از گندمهای مکزیکی در هندوستان در اواسط دهه شصت، بیانگر نوع تجسم یافته تحول فنی بود. البته نوع تجسم نیافته تحول فنی که اساساً ناشی از بهبود روشهای مدیریت بود بیشتر بصورت آرام در بخش کشاورزی هندوستان اتفاق افتاد. نوآوریها و ابداعات ناشی از این تحولات منجر به ایجاد فرصت‌های سرمایه گذاری جدید می‌گردند.

ج)کارایی

بررسی کارایی، به صورت مطلق یا نسبی، همواره یکی از اهداف مهم اقتصاد تولید است. انواع کارایی موردنظر اقتصاددانان عبارتند از :کارایی اقتصادی،کارایی تخصیصی و کارایی قیمتی. گرچه ناکارایی ـ x[1] و تخصیصی (بر اساس نظر پروفسور *Harvey leibenstein* این نوع عدم کارایی، آنگاه رخ می‌هد که استفاده از منابع به صورتی است که بازدهی آنها اندک است و جامعه در نقطه‌ای در داخل مرز امکانات تولید قرار دارد). ممکن است بطور همزمان رخ دهند، اما تجربه نشان داده است که ناکارایی ـ x هم برای توضیح سطوح پائین درآمد و هم برای علت‌یابی مشکلات توسعه برای کشورهای در حال توسعه، نقش بسیار مهم‌تری دارد. به هر حال مایه تأسف است که تا به حال در هندوستان اهمیت بررسی و درمان ناکارایی ـ xاز طرف اقتصاددانان کشاورزی بطور کامل شناخته نشده است. بخش عمدهٔ بررسیهای انجام شده در اقتصاد تولید کشاورزی تنها بر روی جنبه کارایی تخصیصی متمرکز شده است.

در یک محیط اقتصادی ایستای مقایسه‌ای[2] ، اهداف کوتاه مدت و آنی اقتصاد تولید کشاورزی را بطور کلی می‌توان این چنین خلاصه نمود:

۱ـ استخراج مقادیر بهینه نهاده‌های زمین، نیروی کار، سرمایه و مدیریت برای تولید محصولات مختلف کشاورزی و واحدهای دامپروری

۲ـ بررسی الگوی فعلی تخصیص، مربوط به منابع مختلف کشاورزی در درون و بین بنگاههای گوناگون و بررسی تغییر در مقدار بهینه و مقدار فعلی تولید آنها

---

1 . x - Inefficiency

2 . Comparatively static Econemic Environment

۳ـ تجزیه و تحلیل دلایل هر گونه تفاوت بین مقادیر بهینه و مقادیر موجود منابع
۴ـ طراحی روشهای مناسب برای پرکردن شکاف میان الگوی فعلی کاربرد منابع و الگوی بهینه کاربرد آنها، در بخش کشاورزی یک اقتصاد.

بدین ترتیب، هدف اقتصاد کشاورزی، کمک به کشاورزان برای رسیدن به اهداف مورد نظر و کمک به جامعه برای استفاده کاراتر از منابع کشاورزی است. این هدف شامل تخصیص منابع کشاورزی در درون مزرعه و میان مزارع در یک یا چند دوره زمانی می‌شود.

۱-۲-روش پژوهش[1]

روشی که برای دستیابی به اهداف مورد نظر در اقتصاد تولید کشاورزی به کار گرفته شده، روش تجزیه و تحلیل نئوکلاسیکی یا نهائیون است؛ که در گرایش عمومی اقتصاد، کاربرد دارد. اعتقاد بر این است که این گونه نگرش به تئوری تولید با کار ون تونن[2] در سال ۱۸۲۶ آغاز شد. او این اصل را که با برابری وضع نهایی منابع تخصیص یافته، تولید کل حداکثر می‌شود، ارائه نمود. ابزارها یا روشهای مختلف تجزیه و تحلیل که معمولاً برای رسیدن به یک یا چند هدف موردنظر، در اقتصاد تولید کشاورزی به کار گرفته می‌شوند، در این بخش بطور مختصر مورد بحث قرار گرفته است.

۱-۲-۱- روش تابع تولید

تا سال ۱۸۹۴ که ویکستد[3] یک تابع تولید را با قابلیت جانشینی پیوسته میان همه عوامل تولید، مورد استفاده قرار داد، بیان صریح و روشنی از تابع تولید وجود نداشت. در سال ۱۹۰۱ ، ویکسل[4] یکی از نخستین اقتصاددانانی بود که بطور صریح تابع تولید را به کار گرفت، اما این هیکس[5] بود که در سال ۱۹۳۹ با ارئه یک تابع تولید برای یک بنگاه با چند محصول و چند عامل، مثال درسی استاندارد برای تئوری تولید نئوکلاسیکی را فراهم آورد. از دیگر روشهای نسبتاً جدیدتر کاربرد تابع تولید بر طبق فروض نهائیون می‌توان به کارهای اقتصاددانانی مانند کارلسون[6]، دانو[7]، فریش[8]، مونگرو[9] و ساموئلوسون[10] اشاره کرد.

---

1 . The Approach
2 . Von Thunen
3 . Wicksteed
4 . Wicksell
5 . Hicks
6 . Carlson
7 . Dano
8 . Frisch

آنچه به عنوان تحلیل تابع تولید (یا تابع واکنش) شناخته شده است؛ یک روش کاملاً عمومی است. تابع تولید برگردان ریاضی عبارت کاربردی رابطه داده ـ ستاده است. چنین رابطه‌ای ممکن است پیوسته یا ناپیوسته باشد، هدف ما در این کتاب تشریح این روش همراه با جزئیات آن است. از آن جاکه توابع تولید پیوسته، به سادگی بصورت ریاضی قابل نمایش و کاربرد می‌باشند، در سالهای اخیر این روش به عنوان یک روش عمومی به وسیله اقتصاددانان جدید برای تجزیه و تحلیل رفتار تولید[۱۱] مورد استفاده قرار گرفته است.

۱-۲-۲-بودجه‌بندی[۱۲]

روش بودجه‌بندی عبارت است از یک روش آزمایشی و تصادفی[۱۳] به منظور رسیدن به اهدافی مشخص در سطوح خرد و کلان. پژوهشگر یا برنامه‌ریزی که از این روش استفاده می‌کند، تا حدود زیادی ذهنیت خویش را نیز با آن می‌آمیزد. با این حال، این روش به خاطر سادگی‌اش، یکی از محبوب‌ترین روشها نزد برنامه‌ریزان و تصمیم‌گیرندگان است. بدون شک این روش، در شکل رسمی یا غیر رسمی‌اش، قدیمی‌ترین همه روشهاست.

۱-۲-۳-برنامه‌ریزی ریاضی[۱۴]

هنگامی که روش تابع تولید مورد استفاده قرار گرفت، معلوم شد روش ضریب لانگرانژ[۱۵] برای کارآمد کردن بهینه‌سازی مفید است. اما این روش ممکن است حداقل سه مشکل ایجاد کند: نخست این که با استفاده از روش ضریب لانگرانژ ممکن است برای متغیرهای اقتصادی مقادیر منفی بدست آید که بدون مفهوم است، دوم این که وقتی تابع هدف و تمامی قیود مربوط به یک مسأله اقتصاد خاص، خطی هستند، مشتقات جزیی نسبت به متغیرهای مختلف مقادیر ثابت بوده و در این صورت شرایط لازم برای حداکثر یا حداقل سازی، برآورده نمی‌شود. سوم این که، در یک مسأله ممکن است یک یا چند قید به شکل نامساوی باشند. این سه مشکل دلیلی گردید تا تکنیک‌های مختلف برنامه‌ریزی، مورد استفاده قرار گیرند.

مسأله عمومی برنامه‌ریزی را می‌توان این گونه بیان کرد: تعیین مجموعه‌ای از مقادیر

---

9 . *Monger*

10 . *Samuelson*

11 . *Production Behaviour*

12 . *Budgeting*

13 . *Hit and trial Method*

14 . *Mathematical programing*

15 . *The lagrangian multiplier method*

برای متغیرهای x_nو .... و x_2و x_1که یک تابع هدف را

$$Z = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (۱-۱)$$

با توجه به m محدودیت[1] :

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (۲-۱)$$

و با توجه به محدودیتهای غیرمنفی

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \qquad (۳-۱)$$

حداقل یا حداکثر می‌کنند.

در رابطه (۱-۲)، هر محدودیت فقط و فقط دارای یکی از علامتهای $\leq$، $=$ یا $\geq$ است. اگر هم تابع هدف (۱-۱) و هم محدودیتهای (۱-۲) خطی باشند، آنگاه این حالت خاصی از مسأله برنامه‌ریزی ریاضی، یعنی برنامه‌ریزی خطی[2] است؛ که کاربرد بسیار گسترده‌ای دارد.

بحث درباره تکنیک‌های برنامه‌ریزی، موضوع اصلی این کتاب نیست، همین قدر بس، که بگوئیم این تکنیک یک روش سیستماتیک و مؤثری است برای تجزیه و تحلیل اقتصادی مسائلی که دارای چندین متغیر و محدودیت هستند. با دسترسی به برنامه‌های کامپیوتری برنامه‌ریزی خطی، این تکنیک، به یک تکنیک بسیار مهم و معمول برای اقتصاددانان کشاورزی ـ به منظور تجزیه و تحلیل مسائل مختلف اقتصادی ـ تبدیل شده است. استفاده از برنامه‌ریزی خطی، بعضی از مواقع نسبت به تجزیه و تحلیل نهایی ترجیح دارد، چرا که برنامه‌ریزی خطی به طور همزمان، هم مقادیر محصولات تولیدی را و هم تکنولوژی مناسب را برای ایجاد مجموعه‌ای از امکانات تولیدی برای بنگاه تعیین می‌کند. از سوی دیگر در تجزیه و تحلیل نهائیون، فرض بر این است که مسأله تکنولوژی بنگاه قبلاً حل شده است و بنابراین فقط در پی تعیین نوع و مقدار کالاهایی است که باید ساخته شوند تا سود کل را حداکثر کنند.

۱-۳-واژه‌شناسی[3]

همان‌گونه که گفتیم روش تابع تولید با جزئیاتش در این کتاب مورد بحث قرار خواهد

---

1 . Subject to m constrationts

2 . Linear programing problem

3 . The Terminology

گرفت،واژه‌های تخصصی، هرجاکه برای اولین بار آمده‌اند، تعریف شده‌اند. حروف درشت، λ_m , ... λ_1,λ_2 و X_n , ... , X_1, X_2 بیانگر محصولات مختلف و متغیرهای نهاده‌ای هستند، حروف کوچک مربوط به آنها یعنی $y_1,y_2,...,y_m$ و $x_1,x_2,...,x_n$ مقدار آن محصولات یا نهاده‌ها را نشان می‌دهند.

منابع برای مطالعه بیشتر

Dano, Sven, *Industrial Production Models*. Springer-Verlag, New York, 1966.

Dillon, J.L., *The Analysis of Response in Crop and Livestock Production*, 2nd ed., Pergamon Press, Oxford, 1977, Ch. 1.

Fuss, Melvyn and Daniel McFadden (eds.), *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications, Vol. I, The Theory of Production*, North-Holland, Amsterdam, 1978, Ch. II.1.

Heady, E.O. and J.L. Dillon, *Agricultural Production Functions*, Iowa State University Press, Ames, Iowa, 1961, Chs. 3 and 6.

Hicks, J.R., *Value and Capital*, Clarendon Press, Oxford, 1939.

Naylar, T.H. and J.M. Vernon, *Microeconomics and Decision Models of the Firm*, Harcourt, Brace and World, New York, 1969, Ch. 3.

فصل دوم

تابع تولید کشاورزی[1]

تابع تولید کشاورزی را در شکل صریح عمومی آن می‌توان بصورت زیر نوشت :

(۱-۲)
$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n; x_{n+1}, \ldots, x_m; x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_l)$$

که y متغیر وابسته یا تابعی از $x_1, x_2, \ldots, x_n; x+1, \ldots, x_m; x_{m+1}, \ldots, x_L$ است، در اینجا y عبارتست از ستاده Y و $x_1, x_2, \ldots, x_L$ به ترتیب مقادیر نهاده یا منابع $x_1, x_2, \ldots, x_L$ می‌باشند. باید توجه داشت که در اینجا مقادیر ستاده‌ها و نهاده‌ها بر حسب نرخهای جاری در هر واحد زمان هستند.

رابطه (۱-۲) فقط بر یک تابع ریاضی یا رابطه بین مقدار y از ستاده Y بعنوان متغیر وابسته و مقادیر x_1 تا x_L از نهاده‌های X_1 تا X_L بعنوان منابع و عوامل تولید که متغیرهای مستقل‌اند، دلالت دارد. این مفهوم تابع تولید کاملاً عمومی است. یک تابع تولید ویژه ممکن است بوسیله یک نقطه تنها، یک تابع تکی پیوسته یا ناپیوسته یا بوسیله سیستمی از معادلات نشان داده شود.

مشکل واقعی این رابطه، بستگی به محیط زیست‌شناختی[2] و اقتصادی دارد و برآورد آن، برعهده اقتصاددانان است. بیان نموداری تابع تولید (۲-۱) به صورت یک رویه $(L+1)$ بعدی تولید است.

---

1. The Agricaltural Production Function 2. Biological

برای یک بنگاه چند تولیدی[1] و چندعاملی[2] که عامل تولید را برای تولید m محصول متفاوت استفاده می‌کند، شکل عمومی تابع تولید را بصورت ضمنی می‌توان چنین نمایش داد:

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_m; x_1, x_2, \ldots, x_l) = 0$$

در جائیکه :

$$y_k \geqslant 0 \ (k = 1, 2, \ldots, m)$$

مقادیر محصولات و $x_i \leq (i = 1,2,...,l)$، مقادیر عوامل تولید می‌باشند. ابعاد y_k و x_i به صورت واحدهای فیزیکی بر واحد زمان هستند.

۲-۱-طبقه‌بندی متغیرهای مستقل[3]

مجموعه متغیرهای مستقل مؤثر بر مقدار ستاده Y در رابطه (۲-۱) را بطور قراردادی می‌توان در سه شاخه، متغیرهای تصمیم[4]، متغیرهای از قبل تعیین شده[5] و متغیرهای نامعلوم[6] دسته‌بندی کرد، که در اینجا آنها را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۱-۲-۱-متغیرهای تصمیم

متغیرهای تصمیم، نهاده‌های X_1 تا X_n هستند که مربوط به سطوح یا مقادیر x_1 تا x_n بوده و تحت کنترل تصمیم‌گیرنده می‌باشند. بخش عمده هر تحقیق بطور کلی در برگیرنده فقط این دسته فرعی از متغیرهاست. بعضی از این نهاده‌ها ممکن است متغیر باشند در حالیکه ممکن است بعضی دیگر در طول برنامه ریزی مورد نظر ثابت باقی بمانند.

۱-۲-۲-متغیرهای از قبل تعیین شده

مقادیر متغیرهای نهاده $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots, X_m$ یک مجموعهٔ فرعی از چنین متغیرها

1 . *Multiproduct* 2 . *Multifactor*

3 . *Classification of Independent Variables*

4 . *Deciesion variables* 5 . *Predetermined variables*

6 . *Uncertain variables*

را در رابطه (۲-۱) تشکیل می‌دهند. سطوح $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_m$ نهاده‌هایی هستند که در زمان تصمیم‌گیری برای تصمیم‌گیرنده مشخص می‌باشند. بنابراین تصمیم‌گیرنده می‌تواند بدون توانائی در کنترل این سطوح فقط از اطلاعات دربارهٔ آنها استفاده کند.

۱-۲-۳-متغیرهای نامعین

دسته سوم متغیرهای مستقل در رابطه (۲-۱)، متغیرهای نامعین می‌باشند، این متغیرها بوسیله $X_{m+1}, X_{m+2}, ..., X_L$ و مقادیر مربوط به آنها بوسیله $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_l$ نشان داده شده است؛ سطوح این متغیرهانامعین است، بنابراین برای تصمیم‌گیرنده شناخته شده نیستند و نمی‌توان آنها راکنترل نمود.

بعضی مواقع عوامل تولید نیز به عوامل ثابت و متغیر تقسیم‌بندی می‌شوند. برای تولید نهاده ثابت مورد نیاز است اما این مقدار بدون توجه به مقدار تولید ثابت باقی می‌ماند. در کوتاه مدت کارفرمای اقتصادی برای حداکثر نمودن سود، باید هزینه این گونه نهاده‌ها را متحمل شود. از طرف دیگر مقدار نهاده‌های متغیر با ستاده تولید شده متغیر می‌باشند. تفاوت بین این دو مجموعه نهاده‌ها، فقط در مسأله زمان است. البته این تفاوت نسبی است، بطوریکه بعضی از نهاده‌ها برای یک دوره از زمان ثابت ولی در بلندمدت متغیر می‌باشند؛ در بلندمدت همه نهاده‌ها هر آینه متغیر می‌باشند.

اکنون توجه داشته باشید که برای رابطه (۲-۱) هنوز تابع تولیدی، تعریف نشده است. در واقع، در بسیاری از توابع تولید، تعداد نهاده‌های نوع سوم، بی‌نهایت است. این واقعیت ممکن است منجر به این مسأله شود که تابع تولید برازش شده[1]، نقاطی را دربر بگیرد که کاملاً بر روی تابع تولید جداگانه‌ای قرار دارند. بنابراین، تابع تولید برازش شده، یک تابع تولید نامتجانس[2] خواهد بود. پس در بیشتر مواقعی که پژوهشگران می‌کوشند تابع تولیدی تخمین بزنند که از دیدگاه تئوری، درست باشد، تنها به یک تابع نامتجانس دست می‌یابند. این چنین توابعی اغلب ممکن است منجر به تفسیر غلط شوند. اما این خطا در بخش کشاورزی، آنچنان جدی نیست. زیرا انتظار بر این است که بنگاههای کشاورزی در طول زمان در امتداد یک رویهٔ نامتجانس[3] حرکت کنند و نه در امتداد یک رویهٔ درست نظری[4]. اما با توجه به نتایج

---

1 . *Fitted production function*

2 . *Hybrid production function*

3 . *Hybrid surface*

4 . *Theorically True surface*

معمول، تابع نامتجانس، بی‌فایده است، مگر آنکه به اندازه کافی با تابع درست نظری مشابهت داشته باشد.

۲-۲- انواع توابع تولید[۱]

بعضی از شکلهای جبری توابع تولید، برای وضعیتی که تولید یک محصول با استفاده از چندین عامل تولید صورت می‌گیرد در اشکال صریح آن ارائه شده است. بطور کلی توابعی در تحقیقات کشاورزی مورد استفاده قرار می‌گیرند که بوسیله روابط (۲-۲) الی (۲-۱۲) بیان شده است.

۲-۲-۱- چند جمله‌ای درجه اول[۲]

$$y = a_0 + \Sigma a_i x_i \qquad (۲-۲)$$

این تابع را عموماً یک تابع تولید خطی می‌دانند.

۲-۲-۲- چندجمله‌ای درجه دوم[۳] در x_i^{bi}

$$y = a_0 + \Sigma a_i x_i^{b_i} + \Sigma a_{ii} x_i^{2b_i} + \Sigma\Sigma\ a_{ij} x_i^{b_i} x_j^{b_j}, \qquad i < j \quad (۳-۲)$$

وقتی b_i در x_i^{bi} یک است، رابطه (۲-۲) موسوم به یک تابع تولید درجه دوم است. وقتی $bi = \frac{۱}{۲}$ است، رابطه (۲-۳) یک تابع ریشه دوم[۴] است. در کشاورزی، توابع درجه دوم در مطالعات مربوط به واکنش کود کاملاً متداول است.

۲-۲-۳- تابع اسپیلمن یا میتسچرلیچ[۵]

$$y = M - \Sigma A_i R_i^{x_i} \qquad (۴-۲)$$

---

1 . *Types of production functions*

2 . *First degree polynomial*

3 . *Second degree polynomial in* x_i^{bi}

4 . *A square root function*

5. *Mitscherlich or spillman function*

$$y = a_0 \Pi (1 - a_i^{x_i} + b_i) \qquad (۵-۲)$$

۲-۲-۴- تابع تواندار یا کاب ـ داگلاس[1]

$$\ln y = \ln a_0 + \Sigma\, a_i \ln x_i \qquad (۶-۲)$$

یا

$$y = a_0 \Pi\, x_i^{a_i}$$

این تابع تولید بسیار عمومی و بصورت گسترده در تحقیقات کشاورزی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲-۲-۵- تابع کاب - داگلاس تعمیم یافته[2]

$$\ln y = \ln a_0 + \sum_i \sum_j a_{ij} \ln (x_i + x_j)/2 \qquad (۷-۲)$$

۲-۲-۶- تابع ترانسن دنتال (متعالی)[3]

$$y = a_0 \Pi\, x_i^{a_i} e^{b_i x_i} \qquad (۸-۲)$$

۲-۲-۷- تابع تولید ترانس لاگ[4]

$$\ln y = \ln a_0 + \Sigma\, a_i \ln x_i + \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_j a_{ij} (\ln x_i)(\ln x_j) \qquad (۹-۲)$$

این شکل تابع در بخش کشاورزی در حال حاضر نسبتاً متداول گردیده است، خصوصاً برای استفاده از تابع سود، بیشتر معمول است.

۲-۲-۸- تابع مقاومت[5]

$$y^{-1} = a_0 + \Sigma\, a_i (b_i + x_i)^{-1} \qquad (۱۰-۲)$$

1 . Cobb - douglas or power function
2 . Generalized Cobb - Douglas function
3 . Transcenedental function
4 . Translog function
5 . Resistance function

۲-۲-۹- تابع تولید باکشش جانشینی ثابت[1] (CES)

$$y = A[\delta x_1^{-\rho} + (1 - \delta)x_2^{-\rho}]^{-1/\rho} \qquad (۱۱-۲)$$

۲-۲-۱۰- تابع تواندار تعمیم‌یافته

$$y = a_0 \Pi x_i^{f_i(x_1, x_2, \ldots, x_l)} e^{g(x_1, x_2, \ldots, x_l)} \qquad (۱۲-۲)$$

که $fi(o)$ و $g(o)$، چندجمله‌ایهایی هستند که می‌توانند از هر درجه‌ای باشند، توابع چندجمله‌ای در فصل سوم با جزئیات بیشتر مورد بحث قرار گرفته‌اند.

تمامی مطالب قبلی در مورد توابع تولید برای اهداف کوتاه‌مدت مشروط به محدودیتهای زیر تعریف شده‌اند:

۱- دوره تولید باید به اندازه کافی طولانی باشد تا فرآیندهای فنی لازم، بتوانند تکمیل شوند.

۲- دوره تولید، باید آنقدر کوتاه مدت باشد تا تصمیم گیرنده قادر نباشد در سطوح عوامل ثابت مورد استفاده در تولید تغییر ایجاد نماید.

۳- ترقیات فنی نباید در شکل تابع تولید در طول این دوره از زمان تغییر ایجاد نماید. تجزیه و تحلیل‌ها در این قسمت مربوط به دوره کوتاه مدت است، اما براحتی می‌توان آن را با یک اصلاح جزئی بوسیله تخفیف دادن شرط دوم به بلندمدت تعمیم داد.

۲-۳- فروض تجزیه و تحلیل تابع تولید[2]

فروض مهم تجزیه تحلیل تابع تولید عبارتند از:

۱- تابع تولید فقط برای مقادیر غیرمنفی نهاده و ستاده تعریف شده است، بر حسب رابطه (۲-۱)، بدین مفهوم که:

$$y \geqslant 0$$
$$x_i \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, l$$

1 . The Constant Elasticity of Substitution function

2 . Assumptions of production function analysis

۲ـ هر ترکیب ممکن از نهاده در سطح حداکثر ستاده متضمن نتیجه است؛ این بدان مفهوم است که تابع تولید دارای کارائی فنی است.

۳ـ رابطه داده ـ ستاده یا تابع تولید، یک تابع تولیدی تک مقداری پیوسته است، که برای آن، مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم ستاده Y، نسبت به هرکدام از نهاده‌ها، $X_1,...,X_2,X_L$ وجود دارد؛ یعنی $\frac{\partial_2 y}{\partial x_i}$, $\frac{\partial_2 y}{\partial x_i^2}$، $(i=1,2,....,l)$، غیرفرار[1] هستند.

۴ـ مشخصات تابع تولید چنین است :

الف) نزولی بودن بازده نهائی برای تمامی ترکیبات عامل ـ محصول

ب) نزولی بودن نرخ جانشینی فنی بین هر دو عامل

ج) صعودی بودن نرخ تبدیل بین هر دو محصول. این مشخصات بصورت ریاضی اینگونه بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} < 0, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, l \tag{۱۳-۲}$$

$$\frac{d^2 x_i}{d x_j^2} < 0, \qquad i, j = 1, 2, 3, \ldots, l \ (i \neq j) \tag{۱۴-۲}$$

$$\frac{d^2 y_i}{d y_j^2} > 0, \qquad i, j = 1, 2, 3, \ldots, m \ (i \neq j) \tag{۱۵-۲}$$

به تعبیر دیگر، شرایط (۲-۱۳) الی (۲-۱۵) به ترتیب مستلزم یک تابع تولید مقعر نسبت به محور نهاده‌ها، منحنی‌های تولید همسان محدب و منحنی‌های تبدیل تولید مقعر نسبت به مبدأ مختصات است. بنابراین ما نمی‌توانیم موارد بازده‌های صعودی و ثابت را برشمریم، به هرحال این یک تجربه عمومی در تولید کشاورزیست که سطح نهاده X_i افزایشی است. اما تجربه عمومی تولید کشاورزی نشان می‌دهد که با افزایش مقدار نهاده X_i بازدهی‌ها به ترتیب صعودی، ثابت و نزولی می‌شوند. با این وجود در شرایط معمول، احتمال بیشتری وجود دارد که بازدهی هر کدام از نهاده‌ها بصورت منفرد، نزولی باشد.

۵ـ بازده‌های نسبت به مقیاس نزولی می‌باشند، این بدین مفهوم است که افزایش یک

1 . *Non - vanishing*

درصد در تمامی متغیرهای نهاده‌ها، موجب افزایش کمتر از یک درصد در ستاده می‌شود. بعبارت دیگر دوبرابر کردن تمامی نهاده‌ها موجب دوبرابر شدن ستاده نمی‌شود. این فرض را می‌توان بصورت ریاضی توضیح داد:

$$\Sigma(x_i/y)(\partial y/\partial x_i) < 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, l \tag{۱۶-۲}$$

۶- ماهیت دقیق[1] تابع تولید بنگاه، بوسیله مجموعه‌ای از تصمیمات فنی اتخاذ شده توسط تولیدکننده تعیین می‌شود.

۷- تمامی محصولات و عوامل تولید بطور کامل تقسیم‌پذیر می‌باشند.

۸- پارامترهای تعیین کننده تابع تولید بنگاه، در طول دوره مورد مطالعه، تغییر نمی‌کنند. علاوه بر این، این پارامترها نمی‌توانند متغیر تصادفی باشند.

اگر یک یا چند فرض از فروض قبلی نقض شود روش تجزیه و تحلیل تابع تولید فرو می‌ریزد.

اما برای توابعی که یک یا چند فرض پیش گفته برآورده نمی‌شود، روشهای گوناگونی برای تحلیل اقتصادی بسط داده، پیشنهاد شده است. این روشها؛ اغلب مستلزم جایگزین کردن مجموعه جدیدی از فروض به جای فروض یاد شده می‌باشند.

۲-۴- استنتاجهای نظری از توابع تولید[2]

برای دستیابی به اهداف تحلیل تابع تولید، اغلب چندین استنتاج نظری بر اساس توابع تولید انجام می‌شود. در این قسمت بعضی از استنتاجهای مهم بطور مختصر مورد بحث قرار گرفته‌اند.

1 . *Exact nature* .

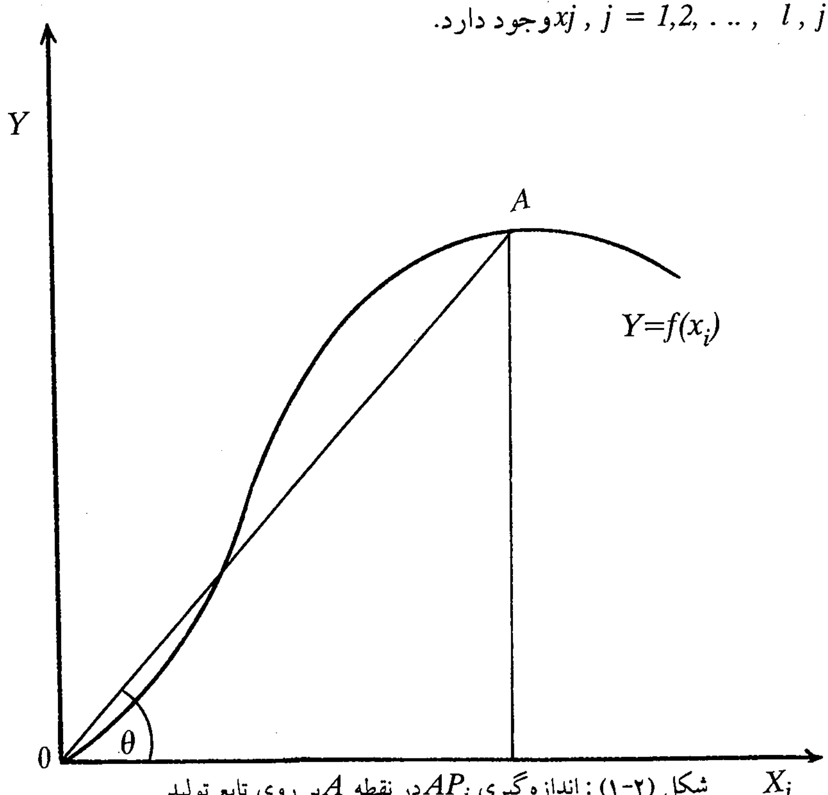
2 . *Theoretical deductions from the production functions*

تولید متوسط نهاده[1] X_i

تولید متوسط نهاده X_i، عبارتست از ستاده تولید شده در هر واحد از نهادهٔ متغیر X_i، در صورتیکه دیگر نهاده‌ها در بعضی سطوح معین ثابت باشند. تولید متوسط نهاده X_i بوسیله AP_iنشان داده می‌شود که برای اندازه گیری متوسط فیزیکی و متوسط ارزشی نهاده می‌توان آن را مورد استفاده قرار داد، منوط به اینکه ستاده بصورت فیزیکی یا ارزشی اندازه گیری شود،تولید متوسط بطور ریاضی عبارتست از :

$$AP_i = \frac{y}{x_i} = \frac{f(x_i, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_l^0)}{x_i} \qquad (۲-۱۷)$$

در رابطه (۲-۱۷) ، $x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, \ldots, x^{\circ}_{i-1} + x^{\circ}_{i+1}, \ldots, x^{\circ}_l$، تمامی پارامترها می‌باشند. امکان رسم یک خانواده از منحنی‌های AP_iبوسیله ارزشهای متفاوت داده شده به $xj , j = 1,2, \ldots, l , j \neq i$وجود دارد.



شکل (۲-۱) : اندازه گیری AP_iدر نقطه Aبر روی تابع تولید

1 . Average product of Input X_i

باید دقت داشت که در اینجا yفقط قسمت واکنش[1] تابع تولید است. بنابراین عرض از مبدأ باید از تابع تولید کل بدست آید. در سرتاسر این متن، توان صفر x_iدلالت بر این دارد که نهادهٔ X_iدر سطح معینی ، ثابت نگهداشته شده است.

AP_iدر یک نقطه از منحنی تابع تولید، برابر است با شیب خطی که آن نقطه را به مبدأ وصل می‌کند. در شکل (۲-۱) ، AP_iدر نقطه Aبر روی تابع تولید بوسیله $tan\theta$ نشان داده شده است که برابر است با $\frac{AB}{OB}$.

تولید نهائی[2]

تولید نهائی نیز ممکن است دلالت بر تولیدنهائی فیزیکی یا ارزشی داشته باشد، بسته به اینکه تولید کل دارای چگونه مقیاسی است. تولید نهائی نهاده X_i (MP_i) عبارتست از تغییر در تولید کل، ناشی از تغییر در این نهاده به شرطی که تمامی نهاده‌های دیگر، در مقادیر از پیش تعیین شده‌ای ثابت بماند. تولید نهائی به صورت ریاضی عبارتست از :

$$MP_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} = f_i'(x_i, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_l^0) \qquad (۱۸-۲)$$

MP_i در تمامی نقاط بر روی تابع تولید برابر است با شیب مماس بر منحنی در آن نقطه. در شکل (۲-۲)، MP_i در نقطه Aروی تابع تولید بوسیله $tan\theta = \frac{AB}{OB}$اندازه گیری شده است؛ که با AP_iدر این نقطه برابر است. بوسیله رسم پاره‌خطهای متعددی که از مرکز مختصات عبور می‌کند، به آسانی می‌توان نشان داد که AP_iدر نقطه Aبر روی تابع تولید دارای مقدار حداکثر است. بنابراین، این نتیجه مهم حاصل می‌شود که در نقطه‌ایکه AP_iدر حداکثر خود قرار دارد $Ap_i = Mp_i$است. از رابطه (۲-۱۷) مقدار حداکثر AP_i با مساوی صفر قراردادن مشتق جزئی نسبت به x_1بدست می‌آید. بطوریکه :

$$\frac{dAP_i}{dx_i} = [x_i f'(x_i, x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_l^0) - f(x_i, x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_l^0)]/x_i^2 = 0 \qquad (۱۹-۲)$$

$$x_i f'(x_i, x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_l^0) - f(x_i, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_l^0) = 0$$

1 . Response part

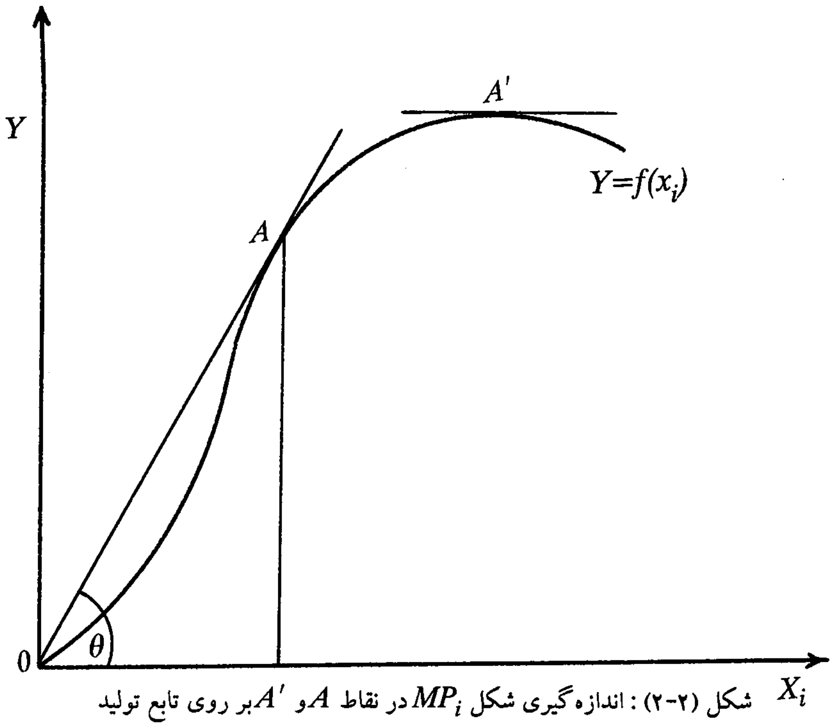
2 . Marginal product

حال اگر عبارت دوم رابطه بالا را به سمت راست برده و سپس هر دوطرف رابطه را بر x°_1 تقسیم کنیم، خواهیم داشت :

$$f'(x_i, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_l^0) = \frac{f(x_i, x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_l^0)}{x_i} \qquad (۲-۲۰)$$

بنابراین در نقطه‌ایکه AP_i در حداکثر خود قرار دارد $MP_i = AP_i$ است.

همانند AP_i، خانواده منحنی‌های MP_i را می‌توان از رابطه (۲-۱۸) بوسیله مقادیر متفاوتی که به $x^{\circ}_1 , x^{\circ}_2 , \ldots , x^{\circ}_{i-1} , x^{\circ}_{i+1} , \ldots , x^{\circ}_l$ داده می‌شود، رسم نمود.



شکل (۲-۲) : اندازه‌گیری شکل MP_i در نقاط A و A' بر روی تابع تولید

کشش تولید[1]

کشش تولید، یا عکس‌العمل، نسبت به نهاده X_i عبارتست از درصد تغییر در مقدار

---

1 . Elasticity of production

ستاده Y در نتیجه یک درصد تغییر در مقدار این نهاده، در حالیکه تمامی نهاده‌های دیگر، در مقادیر از پیش تعیین شده‌ای ثابت می‌مانند. بنابراین مقدار کشش، یک عدد مطلق و فاقد واحد اندازه گیری است.

کشش تولید نسبت به نهاده X_i (EP_i) را بصورت ریاضی می توان بدین گونه نشان داد:

$$E_{p_i} = \frac{\% \Delta \text{ in } y}{\% \Delta \text{ in } x_i} = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln x_i} \tag{۲۱-۲}$$

$$= \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{x_i}{y} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{1}{y/x_i} = \frac{MP_i}{AP_i}$$

بدین ترتیب، کشش تولید نسبت به نهاده i در یک سطح معین را نیز می‌توان بوسیله نسبت بین تولید نهائی و متوسط، در آن سطح نهاده مورد استفاده نشان داد. این نسبت راگاهی نیز به عنوان شاخص ناحیه‌ای[1] برای بازدهی به مقیاس، بکار می‌برند.

کشش تولید یک نهاده، کوچکتر، برابر یا بزرگتر از واحد است در صورتیکه MP به ترتیب کمتر، برابر یا بزرگتر از AP باشد. کشش تولید یک نهاده مثبت خواهد بود تا زمانیکه AP و MP مثبت باشند.

منحنی تولید همسان[2]

منحنی تولید همسان، مسیریست که مکان هندسی سطوح مختلف بیشترین کارایی فنی ترکیبات سطوح دو نهاده x_i و x_j، $(i \neq j)$ را به هم متصل می‌کند که سطح ستاده یکسان y^o را بوجود می‌آورد. این مفهوم همچنین به «منحنی محصول برابر»[3] نیز موسوم است. بطور ریاضی می‌توان آن را از تابع تولید عمومی استخراج کرد، بطوریکه :

$$x_i = g(x_j, x_1^0, x_2^0, \ldots x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_{j-1}^0, x_{j+1}^0, \ldots, x_l^0, y^0) \tag{۲۲-۲}$$

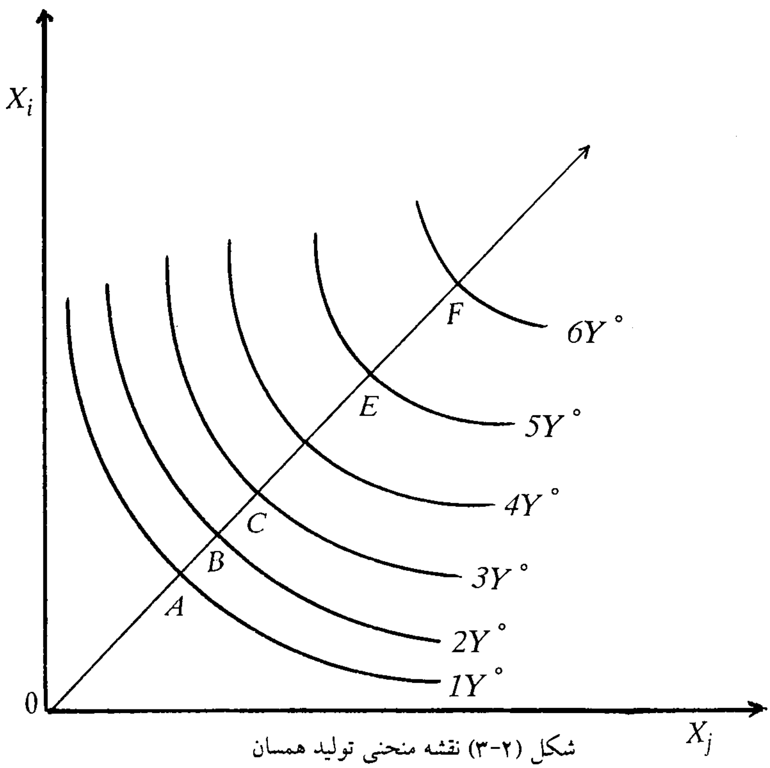
که در اینجا، توان صفر، حاکی از این است که آن نهاده در سطح معینی ثابت است.

در ناحیه منطقی تولید[4]، منحنی تولید همسان یاکمان منحنی محصول برابر در شکل (۲-۳) با دامنه x_i - x_j، نسبت به مرکز مختصات محدب رسم گردیده است. شکل دقیق مربوط به منحنی تولید همسان از شکل تابع تولید، استنتاج می‌گردد. این قبیل توضیحات

1 . Local measure
2 . Isoquant
3 . Isoproduct curve
4 . Relevant Zone of Production

درباره منحنی‌های تولید همسان، وقتی شکلهای خاص توابع تولید همراه با جزئیات آن در فصل چهارم مورد بحث قرار گرفت ارائه خواهد شد.

این امکان وجود دارد که بیش از یک کمان منحنی تولید همسان[1] در یک نمودار مشابه نشان داده شود. شکل (۲-۳) به نقشه منحنی تولید همسان معروف است. کمانهای گوناگون منحنی‌های تولید همسان نسبت به همدیگر متوازیند و تمامی آنها در سطح ربع اول گنجانیده شده‌اند. در ناحیه منطقی تولید کمانهای تولیدات همسان گویایی سطوح بیشتر و بیشتر ستاده هستند وقتی ما از سمت مرکز مختصات به سمت بالا حرکت می‌کنیم. بنابراین کمانهای منحنی تولید همسانی که نسبت به مرکز مختصات دورتر واقع گردیده، گویای ستاده بیشتر است.



شکل (۲-۳) نقشه منحنی تولید همسان

در شکل (۲-۳)، $6y^{(o)} > 5y^{(o)} > \dots > y^{(o)}$ می‌باشد. نقشه منحنی تولید همسان درباره

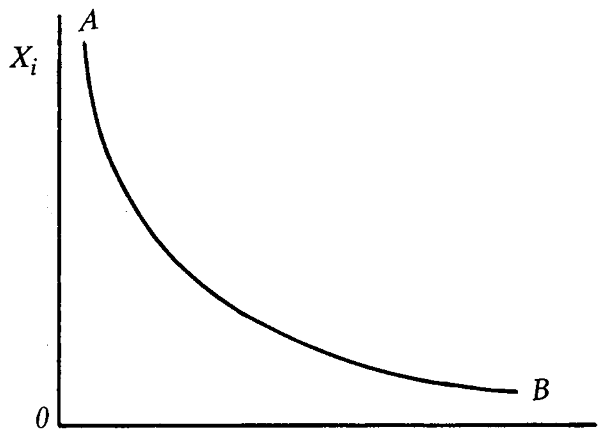
1 . Isoquant Segment

نوع بازده خبر می‌دهد، بسته به اینکه آیا فاصله بین منحنی‌های هم‌مقداری متوالی، ثابت باقی می‌ماند یا نه.البته این فاصله‌ها باید در امتداد شعاعی که از مرکز مختصات رسم می‌شود، اندازه‌گیری شوند و منحنی‌های متوالی باید افزایش ثابتی را در مقدار ستاده نشان دهند. نقشه منحنی تولید همسان نشان دهنده بازده ثابت، فزاینده و کاهنده نسبت به مقیاس است. بسته به اینکه $AB=BC=....=EF$ و $AB>BC>....EF$ یا $AB<BC<...EF$ باشد. البته این امکان وجود دارد که نقشه منحنی تولید همسان نشان دهنده هر سه نوع بازده نسبت به مقیاس در یک نمودار مشابه باشد.

نرخ جانشینی فنی (RTS)[1]

توجه دارید که AB کمان منحنی تولید همسان است، بطوریکه در شکل (۲-۴) نشان داده شده است. در AB تمامی ترکیبات سطوح x_i و x_j دو نهاده، ستاده یکسانی را ایجاد می‌کنند. برای حرکت از سمت A به B در طول کمان منحنی تولید همسان، x_j جانشین x_i می‌شودو برعکس. شیب منفی منحنی تولید همسان بیان کننده نرخ جانشینی فنی است. در شکل (۲-۴) نرخ جانشینی فنی نهاده x_j برای x_i عبارتست از RTS_{ji}، که می‌توان این گونه نوشت :

$$RTS_{ji} = -\frac{dx_i}{dx_j}, \qquad i \neq j \tag{۲۳-۲}$$



شکل (۲-۴) : منحنی تولید همسان

1 . Rate of technical subtitution

وقتی شیب کمانی مانند AB مانند AB برای یک منحنی تولید همسان منفی باشد، RTS_{ji} در رابطه (۲-۲۳) مثبت است. بنابراین برای حرکت از A به B در طول کمان منحنی تولید همسان، RTS_{ji} نزولی است. این بدین مفهوم است که در طول کمان AB برای یک سطح معین ستاده، x_j هرچه بیشتر و بیشتر جانشین x_i می‌گردد و این مستلزم آن است که مقدار بزرگتر و بزرگتری از نهاده j جانشین مقدار مشابه‌ای از نهاده i گردد.

حال توجه کنید که منحنی تولید همسان فقط برای دو نهاده بصورت زیر نشان داده می‌شود:

$$x_i = g(x_j, y^0) \qquad (۲\text{-}۲۴)$$

با استفاده از رابطه (۲-۲۴) برای منحنی تولید همسان، می‌توان رابطه بین RTS_{ji} و MP_i و MP_j را بدست آورد. برای حرکت کوچکی در طول کمان AB تغییری در سطح ستاده بوجود نمی‌آید، از این رو با استفاده از دیفرانسیل کامل، بدست می‌آوریم:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_i}\, dx_i + \frac{\partial y}{\partial x_j}\, dx_j = 0$$

یا

$$-\frac{dx_i}{dx_j} = \frac{\partial y}{\partial x_j}\bigg/\frac{\partial y}{dx_i}$$

لیکن

$$-\frac{dx_i}{dx_j} = RTS_{ji}, \qquad \frac{\partial y}{\partial x_j} = MP_j, \qquad \frac{\partial y}{\partial x_i} = MP_i$$

بنابراین

$$RTS_{ji} = MP_j / MP_i$$

بدین ترتیب، RTS_{ji} بطور ساده عبارت از نسبت بازده نهائی، نهاده‌های X_j و X_i است.

خطوط شیب همسان[1]

این خطوط، محل اتصال مکان هندسی نقاطی است که منحنی‌های تولید همسان متوالی بالاتر، در نقشه منحنی تولید همسان دارای شیب برابر می‌باشند. بنابراین نقاط متصل شده خطوط شیب همسان، نرخ جانشینی فنی برابری را در نقشه منحنی تولید همسان نشان می‌دهد.

معادله خط شیب همسان، را می‌توان بوسیله برابری RTS_{ji} با یک مقدار ثابت مانند C ، نوشت.

$$RTS_{ji} = -\frac{dx_i}{dx_j} = c, \qquad j \neq i \tag{۲-۲۵}$$

که در اینجا ، C یک عدد حقیقی است. تمامی خطوط شیب همان ممکن است به طرف یک نقطه مشخص در فضای x_j، همگرائی پیداکنند. بسته به اینکه آیا رویهٔ تولید به سوی یک رأس متمایز[2] بالا می‌رود یا نه.

مسیر توسعه[3]

معادله خط شیب همسان بوسیله برابری RTS_{ji} با یک مقدار ثابت بدست آمد. اگر این مقدار ثابت، نسبت قیمتهای هر واحد نهاده باشد، آنوقت مسیر توسعه[4] تحقق می‌یابد. بدین ترتیب معادله مسیر توسعه عبارتست از :

$$RTS_{ji} = -\frac{dx_i}{dx_j} = \frac{p_j}{p_i}, \qquad i \neq j \tag{۲-۲۶}$$

در اینجا P_j و P_i قیمت هر واحد نهاده X_j و X_i می‌باشند. این خطوط، نشان دهنده

---

1 . *Isoclines*

2 . *Single point*

3 . *Expansion path*

۴ . در واقع مسیر توسعه، منحنی شیب همسان خاصی است که در طول آن تولید بسط خواهد یافت، در حالیکه قیمت عوامل ثابت باقی می‌مانند. بنابراین مسیر توسعه نشان دهندهٔ چگونگی تغییر نسبی مقدار نهاده‌ها در حالت تغییر تولید یا هزینه‌هاست، در حالیکه قیمت نهاده‌ها تا آخر ثابت خواهد ماند (م).

مسیری هستند که در شرایط قیمتی معین، با افزایش ستاده، نهاده‌ها با یکدیگر ترکیب می‌شوند. یک تصمیم‌گیرنده معقول فقط ترکیبات نهاده‌ای را که در مسیر توسعه قرار دارد انتخاب می‌کند. مسیر توسعه در واقع یک تابع ضمنی[1] از x_i و x_j است یعنی :

$$g(x_i, x_j) = 0$$

باید بطور روشن متوجه شده باشید که منفی بودن نسبت قیمت نهاده، بیان‌کننده شیب خط هزینه برابر[2] است؛ با علم به اینکه هزینه تولید (C) یک تولیدکنندهٔ خریدار دو نهاده X_i و X_j در بازار رقابت کامل را می‌توان اینگونه نوشت :

$$c = p_i x_i + p_j x_j + a, \qquad (۲-۲۷)$$

که در اینجا، P_i و P_j قیمتهای نهاده‌های X_i و X_j و a هزینه ثابت می‌باشند، یعنی هزینه دیگر نهاده‌ها در سطوح معین ثابت فرض شده است. حال خط هزینه برابر را می‌توان اینگونه تعریف کرد که مکان هندسی x_i و x_j که ممکن است به قیمت هزینه‌ای مانند $\mathring{C}$ خریداری شده باشند، بدین ترتیب :

$$c^0 = p_i x_i + p_j x_j + a \qquad (۲-۲۸)$$

اگر معادله (۲-۲۸) را برای x_i حل کنیم، بدست می‌آید :

$$x_i = \frac{c^0 - a}{p_i} - \frac{p_j}{p_i} x_j \qquad (۲-۲۹)$$

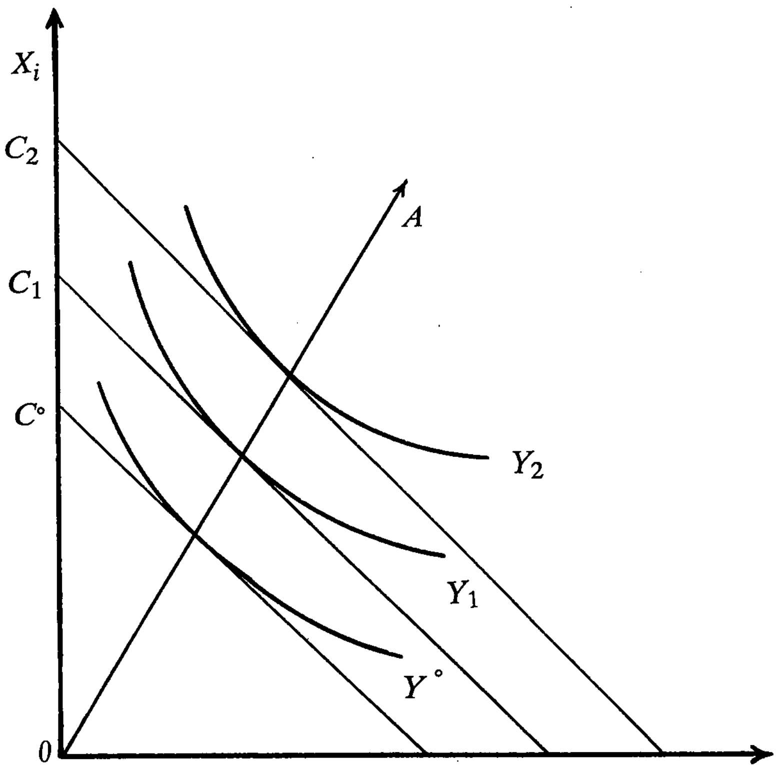
که معادله خط هزینه برابر دارای شیب و عرض از مبدأ می‌باشد. بدین ترتیب شیب خط هزینه برابر $\frac{P_j}{P_i}$ - است. در این صورت، عرض از مبدأ $\frac{(C^0 - a)}{P_i}$ بیان‌کننده مقدار X_i می‌باشد که باید خریداری شود (در صورت عدم خرید از X_j) اگر بطور کامل هزینه به آن اختصاص داده شود، به استثناء هزینه نهاده ثابت (a). شکل (۲-۵) خانواده‌ای از سه منحنی

---

1 Isocost line

2 . Perfectly competive market

تولید همسان و خطوط هزینه برابر را نشان می‌دهد. شعاع OA، بیان‌کننده مسیر توسعه است که مکان هندسی نقاط مماس بین خطوط هزینه برابر و منحنی‌های تولید همسان می‌باشد.



شکل (۲-۵) : خطوط هزینه برابر، منحنیهای تولید همسان و مسیر توسعه

خطوط مرزی[1]

خطوط مرزی، خطوط شیب همسان خاص با شیب صفر یا بینهایت می‌باشند. بدین ترتیب معادلات خطوط مرزی را می‌توان اینگونه نوشت :

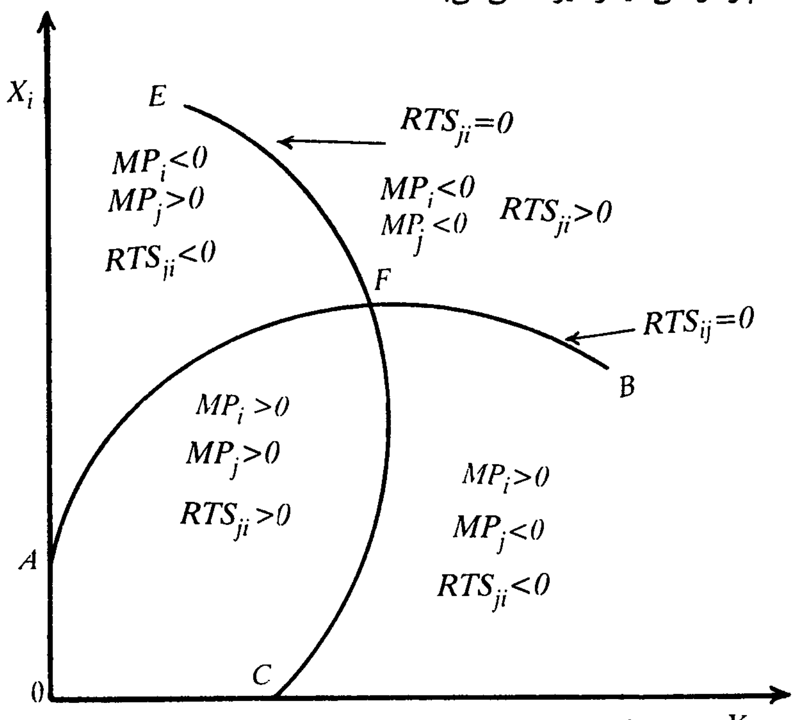
$$RTS_{ji} = -\frac{dx_i}{dx_j} = 0, \qquad i \neq j$$
$$RTS_{ji} = -\frac{dx_i}{dx_j} = \infty, \qquad i \neq j \qquad (۳۰-۲)$$

1 . Ridge lines

و این مفهوم که :

$$RTS_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} = 0, \qquad i \neq j \tag{۳۱-۲}$$

هرگاه تابع تولید دارای یک رأس متمایز[1] باشد دارای حداکثر سطح ستاده معین است. دو خط مرزی، مساحت x_i - x_jرا به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که در شکل (۲-۶) نشان داده شده است. در هر ناحیه، مقادیر MP_i و MP_j مشخص گردیده است. نقطه F در شکل بیان کننده نقطه حداکثر منحنی تولید همسان است. ناحیه $OCFA$، گویای ناحیه مناسب تولید برای تصمیم‌گیرنده است. بطوریکه MP_i و MP_j هر دو بزرگتر از صفر می‌باشند. نقشه منحنی تولید همسان (نگاه کنید به شکل (۲-۳)) فقط به این ناحیه محدود است. خواننده به سادگی می‌تواند دریابد که چرا نواحی دیگر غیرمنطقی می‌باشند.



شکل (۲-۶) : خطوط مرزی و رابطه بین MP_i و MP_j

---

1 . Distinct Peak

کشش جانشینی [1] (ES_{ij})

زمان بحث درباره این مفهوم برمی‌گردد به سالهای ۱۹۳۰، کاری که جون‌رابینسون [2] و هیکس [3] انجام دادند. ابتداء، بحث فقط مربوط به دو نهاده بود و کشش جانشینی عبارت بود از تغییر نسبی در نسبت نهاده، تقسیم بر تغییر نسبی در نرخ جانشینی فنی با سطح ستاده ثابت. در گذشته کشش جانشینی به L عامل بسط داده شد. بعضی مواقع این مفهوم به کشش مستقیم جانشینی عوامل [4] موسوم است و بیانگر یک شاخص ناحیه‌ای [5] برای جانشینی بین نهاده‌ها است. کشش جانشینی به سهولت تغییر در نسبت نهاده را به عکس‌العمل تغییر ایجاد شده در نسبت قیمتهای نهاده اندازه گیری می‌کند. از تابع تولید عمومی می‌توان استنتاج کرد بطوریکه :

$$ES_{ji} = \frac{\% \Delta(x_i/x_j)}{\% \Delta(-dx_i/dx_j)}$$

بنابراین :

$$ES_{ji} = \frac{d(x_i/x_j)}{d(-dx_i/dx_j)} \frac{-dx_i/dx_j}{x_i/x_j}, \qquad i \neq j \qquad (۳۳-۲)$$

به گونهٔ دیگر نیز می‌توان بیان کرد بطوریکه :

$$ES_{ji} = \frac{d \ln (x_i/x_j)}{d \ln (-dx_i/dx_j)} \qquad (۳۴-۲)$$

چگونگی کاهش RTS_{ji} برای حرکت در طول کمان AB، منحنی تولید همسان، در شکل (۲-۴) تعیین می‌گردد. ES_{ji} ممکن است تغییر از یک ترکیب عوامل به ترکیب عوامل دیگر باشد و واحدهای نهاده‌ها و واحد تولید از همدیگر مستقل باشند. برای تمامی ترکیبات نرمال نهاده‌ها، کشش جانشینی مثبت و بین صفر و بی‌نهایت است، بسته به اینکه یک نهاده تا چه حد می‌تواند در تولید، جانشین نهاده دیگر گردد.

---

1 . Elasticity of substitution

2 . Joan Robinson

3 . H.R.Hicks

4 . Direct Elasticity of factor subtitution

5 . Local Measures

از آنجاکه برای ترکیب نهاده‌ای کمترین هزینه داریم[1]:

$$-\frac{dx_i}{dx_j} = \frac{P_j}{P_i}$$

که P_j و P_i قیمتهای هر واحد نهاده‌های X_i و X_j می‌باشند ، کشش جانشینی میان دو نهاده را بصورت دیگری نیز می‌توان تعریف کرد، یعنی :

$$ES_{ji} = \frac{\%\,\Delta(\bar{x}_i/\bar{x}_j)}{\%\,\Delta(p_j/p_i)} = \frac{d\ln(\bar{x}_i/\bar{x}_j)}{d\ln(p_j/p_i)} \qquad (۳۴-۲)$$

یا

$$ES_{ji} = \frac{d(\bar{x}_i/\bar{x}_j)}{d(p_j/p_i)}\,\frac{(p_j/p_i)}{(\bar{x}_i/\bar{x}_j)} \qquad (۳۵-۲)$$

در رابطه (۲-۳۴) و (۲-۳۵) ، $\bar{x}_i$ و $\bar{x}_j$ مقادیر نهاده‌ای کمترین هزینه[2] و P_i و P_j قیمتهای مربوط به آن نهاده‌هاست. در یک عبارت ساده، این مقیاس عبارتست از درصد تغییر در نسبتهای عوامل نسبی در نتیجه یک درصد تغییر در قیمتهای عوامل نسبی است.

در پاسخ به این تجزیه و تحلیل ، اقتصاد دانان یک مفهوم نسبتاً ساده‌تری از کشش جانشینی را مورد استفاده قرار دادند؛ که کاملاً متفاوت از اکثر مفاهیم مشکل توضیح داده شده در این بخش است. در اینجا ES_{ji} عبارتست از درصد تغییر در مقدار نهاده $i(x_i)$ به یک درصد تغییر در سطح نهاده $j(x_j)$ ، به صورت منفی، در سطح ستاده داده شده y°، بنابراین بر طبق این تعریف :

$$ES_{ji} = -\frac{\%\,\Delta \text{ in } x_i}{\%\,\Delta \text{ in } x_j}$$

$$= -\frac{\Delta x_i}{\Delta x_j}\,\frac{x_j}{x_i} \qquad (۳۶-۲)$$

در حد، بطوریکه $x_j \to o$ میل کند، رابطه (۲-۳۶) را می‌توان اینگونه نوشت، بطوریکه:

$$ES_{ji} = -\frac{dx_i}{dx_j}\,\frac{x_j}{x_i} \qquad (۳۷-۲)$$

که برآورد مربوط به یک نقطه خاص در منحنی تولید همسان داده شده است. می‌توان

---

1 . *Least cost Input combination*

2 . *Least cost Input levels*

براحتی ثابت کرد که :

$$ES_{ij} = 1/ES_{ji}$$

توابع هزینه، عرضه و تقاضا[1]

توابع تولید کشاورزی اساساً برای بدست آوردن توابع هزینه، عرضه یا تقاضا برآورد نشده‌اند. به هر حال، این چنین روابطی را بعضی مواقع می‌توان به منظور آگاهی درباره پارامترهای اساسی تهیه نمود.

برای سهولت، تابع تولید توان‌دار، ارتباط مشترک بیشتری نسبت به تمامی توابع با اقتصاد کشاورزی دارد و برای استخراج هزینه کوتاه مدت و توابع عرضه و تقاضای ایستا، مورد استفاده قرار می‌گیرد آنها را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۱ـ توابع هزینه

اجازه بدهید تابع تولید را اینگونه بنویسیم :

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \qquad (۳۸-۲)$$

در رابطه (۲-۳۸)، x_2 مقدار تمامی عوامل تولید که ثابتند و بدین ترتیب، x_1 مقدار عامل X_1 که می‌تواند تغییر کند. بنابراین علاوه بر a_o که در رابطه (۲-۳۸) ثابت است، x_2^{a2} نیز ثابت است. $a_o x_2^{a2}$ را می‌توان بوسیله b نشان داد که در این صورت رابطه (۲-۳۸) اینگونه نوشته می‌شود :

$$y = b x_1^{a_1} \qquad (۳۹-۲)$$

از رابطه (۲-۳۹) ، می‌توان x_1 را بر حسب y بدست آورد، بطوریکه :

$$x_1 = b^{-1/a_1} y^{1/a_1} \qquad (۴۰-۲)$$

معادله هزینه کل مربوط به تابع تولید (۲-۳۸) را می‌توان اینگونه نوشت ، بطوریکه :

---

1 . Cost , Supply and Demand functions

$$c = k + p_1 x_1 \qquad (۲-۴۱)$$

در اینجا C ، هزینه کل، k و $p_x x_1$ هزینه‌های ثابت و متغیر را تشکیل می‌دهند. با جانشین نمودن مقدار x_1 از رابطه (۲-۴۰) در رابطه (۲-۴۱) خواهیم داشت :

$$c = k + b^{-1/a_1} p_1 y^{1/a_1} \qquad (۲-۴۲)$$

که رابطه (۲-۴۲) تابع هزینه کل کوتاه مدت مربوط به تابع تولید داده شده بوسیله رابطه (۲-۳۸) می‌باشد. توجه کنید که در این تابع هزینه، هزینه کل، تابعی است از سطح ستاده y. توابع هزینه نهائی و متوسط کل کوتاه مدت مربوط به تابع هزینه کل داده شده بوسیله رابطه (۲-۴۲) ، عبارتند از :

$$\frac{C}{y} = ATC = ky^{-1} + b^{-1/a_1} p_1 y^{1/a_1 - 1} \qquad (۲-۴۳)$$

$$\frac{dc}{dy} = MC = \frac{1}{a_1} b^{-1/a_1} p_1 y^{1/a_1 - 1} \qquad (۲-۴۴)$$

شیوه استخراج در رابطه (۲-۴۳)، (۲-۴۴) ، یعنی معادلات هزینه متوسط کل کوتاه مدت (ATC) و هزینه نهائی کوتاه مدت (MC) بسیار ساده و نیاز به تمرین از قبل ندارد. سه تابع هزینه استخراج شده مذکور، برای مقادیر مختلف نهاده‌های ثابت که با x_2 اندازه گیری می‌شوند و مقادیر مختلف قیمت هر واحد نهاده متغیر، P_1 متفاوت هستند.

۲ـ تابع عرضه ایستا برای ستاده[1]

تابع MC بدست آمده در رابطه (۲-۴۴) را می‌توان برای استخراج تابع عرضه ستاده ایستا با توجه به عدم قید سرمایه، ریسک و شرایط عدم اطمینان[2] مورد استفاده قرار داد. برای حداکثر نمودن سود تحت شرایط رقابت کامل در کشاورزی، هزینه نهائی (۲-۴۴) را باید

1 . *Static output supply function* 2 . *Nucertainty conditions*

مساوی درآمد نهائی قرار داد که در اینجا قیمت هر واحد y، P_y است. بدین ترتیب :

$$\frac{1}{a_1} b^{-1/a_1} p_1 y^{1/a_1 - 1} = p_y \qquad (۴۵-۲)$$

حال از رابطه (۲-۴۵) ، y را بر حسب متغیرهای دیگر بدست می‌آوریم، یعنی :

$$y = (a_1 p_1{}^{-1} b^{1/a_1})^{a_1/(1-a_1)} p_y^{a_1/(1-a_1)} \qquad (۴۶-۲)$$

معادله (۲-۴۶) ، نشان دهنده سطح ستاده y می‌باشد، بطوریکه تابعی است از قیمت خودش یعنی P_y. اگر تابع هزینه کل در سطح حداقل AVC قابل تخمین باشد، پس بهتر است تابع عرضه را در دو قسمت بنویسیم :

$$y = 0 \quad \text{for } p_y < \min AVC$$

$$y = g(p_y) \quad \text{for } p_y \geqslant \min AVC$$

در شرایط دنیای واقعی که با معایبی مانند شیوع ریسک و عدم اطمینان در ضرائب نهاده ـ ستاده و در قیمتها و وجود اهدافی غیر از سود[1] مواجه می‌شویم، رابطه (۲-۴۶) فقط یک تابع عرضه ایستائی «دستوری»[2] است و نشان‌دهنده عکس‌العمل عرضه[3]، آنگونه که «باید»[4] باشد. در مقابل، تابع عرضه «واقعی»[5] نشان دهنده عکس‌العمل عرضه است «آن گونه هست»[6] و معمولاً آن را تابع عرضه «اثباتی»[7] می‌نامند.

---

1 . non - profit goals

2 . Normative

3 . Supply repsonse

4 . "Ought"

5 . actual

6. as it is

7 . Positive supply function

۳ـ تابع تقاضای ایستا برای نهاده

این تابع را نیز می‌توان از تابع تولید داده شده تحت شرایط عادی رقابت کامل با هدف حداکثر نمودن سود بدست آورد. منحنی تقاضاهای نهاده برای X_i بوسیله رسم تقاضاهای نهاده، چنانچه فقط تابع P_i باشد، بدست می‌آید، با این فرض که $(i \neq j), P_j$ و P_y پارامترهای داده شده‌اند.

روش استخراج تابع تقاضاهای ایستا برای نهاده X_i بواسطه تابع تولید داده شده در رابطه (۲-۳۹) بصورت زیر است : مشتق مرتبه اول y نسبت به x_1 عبارتست از :

$$\frac{dy}{dx_1} = a_1 b x_1^{a_1 - 1} \qquad (۲-۴۷)$$

وقتی که y در رابطه (۲-۳۹) ، دارای متیاس فیزیکی است، $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ در رابطه (۲-۴۷) عبارتست از تولید نهائی فیزیکی[1] (MPP_1) نسبت به نهاده X_1. برای حداکثر نمودن سود بدون قید سرمایه، زمان، ریسک و عدم اطمینان، MPP_1 باید با نسبت قیمت محصول عامل برابر باشد یعنی :

$$a_1 b x_1^{a_1 - 1} = p_1 / p_y \qquad (۲-۴۸)$$

در روش دیگر، شرط (۲-۴۸) را می‌توان نیز بوسیله ساختن تابع سود مربوط به تابع (۲-۳۹) بدست آورد، بطوریکه :

$$\pi = p_y b x_1^{a_1} - p_1 x_1 \qquad (۲-۴۹)$$

با مساوی صفر قرارداد مشتق مرتبه اول رابطه (۲-۴۹) ، داریم :

$$\frac{d\pi}{dx_1} a_1 p_y b x_1^{a_1 - 1} - p_1 = 0 \qquad (۲-۵۰)$$

---

1 . Marginal physical product

که رابطه بدست آمده (۲-۴۸) را می‌توان مرتب نمود.

حل معادله (۲-۴۸) برای x_1، شرط مرتبه دوم را برای حداکثر نمودن سود تهیه می‌کند. که بدست می‌آید :

$$x_1 = \left(\frac{p_1/p_y}{a_1 b}\right)^{1/(a_1-1)}$$

یا

$$x_1 = \left(\frac{1}{a_1 b p_y}\right)^{1/(a_1-1)} p_1^{1/(a_1-1)} \qquad (۵۱-۲)$$

اگر

$$\left(\frac{1}{a_1 b p_y}\right)^{1/(a_1-1)} = k$$

بدین ترتیب رابطه (۲-۵۱)، خلاصه می‌شود.

$$x_1 = k p_1^{1/(a_1-1)} \qquad (۲-۵۲)$$

بنابراین معادله (۲-۵۲)، یک عبارت خلاصه شده معادله تقاضای ایستا برای نهاده X_1است، بطوریکه x_1نشان دهنده تابعی است که تابع قیمت خودش یعنی P_1 است. نیز یک تابع تقاضای «دستوری»[1] برای نهاده X_1است و بیانگر رابطه قیمت ـ تقاضا است، آنگونه که باید باشد. طبق شرایط نرمال در بازده‌های نزولی، $a_1<1$است. از این رو در رابطه (۲-۵۲)، عبارت $0 < \frac{1}{a_1-1}$است. بنابراین از شکل رابطه (۲-۵۲) درمی‌یابیم که چنانچه قیمت X_1 افزایش یابد. سطح عامل X_1 (یعنی x_1) کاهش یافته و برعکس، لذا تابع تقاضادارای شیب منفی است. همانند تابع عرضه ایستا، تابع تقاضای ایستا، نیز به x_2، حجم عوامل ثابت تولید ارتباط دارد.

این روش می‌تواند به سادگی به تابع تولید با دو نهادهٔ متغیر بسط داده شود. توجه کنید که در تابع تولید (۲-۳۸) این قبیل پارامترها، $a_1, a_1>0$ و $a_1 + a_2<1$است.

حال شکل تابع سود عبارتست از :

$$\pi = p_y a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} - p_1 x_1 - p_2 x_2 \qquad (۵۳-۲)$$

1 . *Normative demand function*

با پیدا نمودن مشتقات جزئی نسبت به x_1 و x_2 از رابطه (۲-۵۳) و مساوی صفر قراردادن هرکدام از آنها، خواهیم داشت :

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = p_y a_0 a_1 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2} - p_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = p_y a_0 a_2 x_1^{a_1} x_2^{a_2-1} - p_2 = 0$$

با حل این معادلات برای x_1 و x_2، توابع تقاضا برای دو نهاده بدست می‌آید.

$$x_1 = \left(\frac{a_1}{p_1}\right)^{(1+a_2)/k} \left(\frac{a_2}{p_2}\right)^{a_2/k} (a_0 p_y)^{1/k} = g_1(p_1, p_2, p_y)$$

(۲-۵۴)

$$x_2 = \left(\frac{a_1}{p_1}\right)^{a_1/k} \left(\frac{a_2}{p_2}\right)^{(1-a_1)/k} (a_0 p_y)^{1/k} = g_2(p_1, p_2, p_y)$$

جائیکه $K = 1 - a_1 - a_2$ است، تقاضا برای هر نهاده کاهش می‌یابد، چنانکه قیمت نهاده افزایش یابد، تقاضا با افزایش قیمت محصول افزایش می‌یابد.

تمرین

۲-۱- معادلات زیر را بر x_1 حل کنید :

الف) $ax^2 + bx + c = 0$

ب) $۳۰x^2 + ۹۰۰x + ۱۸۰۰ = ۰$

۲-۲- مشتقات مرتبه اول و دوم توابع زیر را نسبت به x پیدا کنید. همچنین سطوح x را در جائیکه y حداکثر است، اگر حداکثری برای تابع وجود دارد بدست آورید.

الف) $y = ۲۰۰ + ۰/۵\, x$

ب) $y = ۲۰e^{3x}$

پ) $y = ax^{h1}e^{c+2x}$

ت) $y = ۱۰ - ۰/۲x + ۲۰x^2$

ث) $y = ۲۰ + ۳x - ۰/۲۲x^2$

ج) $y = ۶۰ - ۰/۰۰۳۲x$

چ) $y = ۳۰۰x^{0.5}$

ه) $y = M - AR^x$

خ) $y = ۲۰x^{0.5}\bar{e}^{0.2x}$

۲-۳- تابع واکنش کود و فسفات برای بادام زمینی در زیر داده شده است :

$$y = ۱۸۰۰ + ۱۲P - ۰/۲P^2$$

در اینجا yبازده دانه‌های بادام زمینی در هر هکتار و Pمقدار ماده غذائی مقوی P_2O_5 به‌کار رفته در هر هکتار است. تابع تقاضا را برای کود شیمیائی فسفات بدست آورید.

۲-۴- تابع عرضه مربوط به تابع هزینه کل زیر را استخراج کنید.

$$C = ۰/۱y^3 - ۴y^2 + ۱۰y + ۲۰$$

۲-۵- تابع هزینهٔ نهایی زیر داده شده است .

$$MC = ۲۷y^2 - ۳۶۰y + ۱۰۰۰$$

تابع هزینه کل مربوط را وقتی که هزینه ثابت کل برابر R_s ۴۰۰۰ است پیدا کنید، مقدار yدر حداقل AVCچقدر است؟ اگر قیمت محصول P_y، R_s ۱۰۰۰ در هر واحد باشد، سطح حداکثر سود ستاده را برآورد کنید.

۲-۶- معادله MP داده شده است

$$MP = \frac{\partial y}{\partial x} = ۱۰ - ۰/۰۲x$$

تابع تولید کل را بدست آورید. همچنین آیا معادله APرا می‌توانید بدست آورید؟ مقدار MPو APمربوط به $x = ۱۰۰۰$ واحد را برآورد کنید. کشش تولید در این نقطه چقدر خواهد بود.

۲-۷- در چه همگنی توابع زیر رابدست آورید.

الف) $y = a_1x_1^{\,2}$ ب) $y = a_1x_1 - a_2x_2$ پ) $y = a_0x_1^{\,a1}x_2^{\,a2}x_3^{\,a3}$

۲-۸- اگر تابع تولید $y = f(x_1 , x_2)$ همگن از درجه t باشد، روابطی راکه با توجه به قضیه اولر برقرار است، بنویسید.

۲-۹ تابع تولید زیر داده شده است :

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{11}x_1^{\,2} + a_{22}x_2^{\,2} + a_{12}x_1x_2$$

در اینجا yمقدار ستاده تولید شده و x_1و x_2مقادیر نهاده‌های X_1و X_2بکار رفته و a_o و a_1، a_{11}، a_{22} و a_{12} مقادیر ثابت که a_{11} و a_{22} کوچکتر از صفر می‌باشند.

الف ـ معادله منحنی تولید همسان را استخراج کنید، شکل آن چگونه است؟

ب ـ عبارات MP_1، MP_2 و RTS_{12}را پیدا کنید، درباره علامتهای MP_1و MP_2 چه

چیزی را می‌توان گفت.

۱۰-۲- معادله هزینه داده شده مربوط است به یک کارفرمای اقتصادی که دو نهاده X_1 و X_2 را برای تولید محصولی مانند Y مورد استفاده قرار می‌دهد، چنانکه :

در اینجا P_1 و P_2 قیمتهای هر واحد X_1 و X_2 و C° هزینه است و تابع تولید داده شده عبارتست از :

$$y = a_0 x_1^{a1} x_2^{a1}$$

چنانکه

$$a_2 = 1\text{-}a_1 \qquad , \quad 0<a_1<1$$

الف - معادله مسیر توسعه را بدست آورید.

ب - این تولیدکننده چگونه در مورد سطح ستاده در جائیکه $\mathring{C}$ کمترین مقدار هزینه است، تصمیم می‌گیرد.

منابع برای مطالعه بیشتر

Allen, R.G.D., *Mathematical Analysis for Economists*, ELBS and MacMillan, London, 1968, Ch. 13.

Christensen, L.R., D.W. Jorgenson and L.J. Lau, "Conjugate Duality and the Transcendental Logarithmic Functions", *Econometrica*, **39(4)** (Abstract), 1971, pp 255–256.

Diewert, W.E., *Separability and a Generalization of the Cobb-Douglas Cost, Production and Indirect Utility Functions*, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Technical Report No. 86, Stanford University (California), 1973.

Dillon, J.L., *The Analysis of Response in Crop and Livestock Production*, 2nd ed., Pergamon Press, Oxford, 1977, Ch. 1.

Heady, E.O. and J.L. Dillon, *Agricultural Production Functions*, Iowa State University Press, Ames, Iowa, 1961, Chs. 2 and 3.

Hicks, J.R., "Elasticity of Substitution Again: Substitutes and Complements", *Oxford Economic Papers*, **22** (3), 1970, pp 289–296.

فصل سوم

روش شناسی تابع تولید[1]

روش‌شناسی تحلیل تابع تولید عمدتاً دربرگیرنده مراحل زیر است :

۱ـ تصریح مدل اقتصادی، یعنی تابع تولید. (این مرحله مستلزم تدوین فرضیه‌هایی است که انگاشته می‌شوند).

۲ـ اندازه گیری و دسته‌بندی داده‌ها و ستاده‌ها.

۳ـ گردآوری آمارهای مربوط به متغیرهای گوناگون تابع تولید تصریح شده.

۴ـ بررسی مشکلات تخمین.

۵ـ تخمین تابع تولید، با استفاده از روش‌های اقتصادسنجی مناسب.

۶ـ ارزیابی تخمین‌ها، یعنی رضایت‌بخش بودن و قابلیت اعتماد تخمین‌های فراهم آمده به وسیله برخی ملاک‌ها تعیین می‌شود.

۷ـ استنتاج مقادیر مورد نظر، برای دست‌یابی به اهداف مطالعه

این مراحل مستلزم آگاهی‌های یک اقتصاددان، یک آماردان و یک اقتصادسنجی دان می‌باشد. جزئیات هرکدام از این مراحل در این فصل بررسی می‌شود.

۳-۱ تصریح مدل اقتصادی

هدف پژوهش‌گر آن است که یک مدل اقتصادی مناسب تصریح کند. یعنی برای آن که به طور تجربی به تابع تولید دنیای واقعی دست یابد، آن رابطه را به شکل ریاضی بیان میکند. این مرحله را به عنوان مرحله تدوین فرضیه‌های انگاشته شده[2] نیز می‌شناسند. کارآمدی یک مدل اقتصادی در ارائه نتایج معتبر، بستگی دارد به این که، این مدل با چه دقتی شبیه مسأله

---

1 . *The Methodology of Production Function Analysis*

2 . *Formulation of the Maintained Hypothesis*

تولید در دنیای واقعی است. به هنگام تصریح یک مدل اقتصادی، که بی‌گمان مهم‌ترین مرحله است، پژوهشگر عمدتاً با سه مسأله روبرو می‌شود:

۱ـ انتخاب متغیرهای مستقل و وابسته مناسب برای مدل.

۲ـ تعیین شکل ریاضی مدل (یعنی تعیین این که آیا یک معادله مناسب است یا یک سیستم معادلات، این معادلات خطی باشد یا غیرخطی، و الی آخر).

۳ـ انتظاراتی که پژوهشگر پیشاپیش[1] دربارهٔ علامت و اندازهٔ پارامترهای تابع دارد.

انجام رضایت‌بخش این موارد مستلزم داشتن آگاهی‌های گسترده‌ای دربارهٔ جزئیات دقیق منطق فیزیکی، زیست‌شناختی و اقتصادی مربوط به فرآیند تولید است. فقدان آگاهی دربارهٔ برخی جزئیات یا درباره دشواریهای محاسباتی، اغلب می‌تواند منجر به برخی چشم‌پوشی‌ها و اغماض‌ها از سوی پژوهشگر شود.

اکنون به بررسی تفصیلی‌تر هر کدام از این سه جزء تصریح مدل‌های اقتصادی می‌پردازیم.

انتخاب متغیرها

پژوهشگر برای تهیه فهرستی از متغیرهای مناسب (رگرس‌کننده‌ها) که بر فرآیند تولید، و بر متغیر وابسته (رگرس شونده) اثر می‌گذارند، باید از اطلاعاتی که در پژوهش‌های قبلی دیگران دربارهٔ منطق اقتصادی، زیست‌شناختی و فیزیکی موضوع نهفته است، استفاده کند. تعداد متغیرهایی که باید در مدل گنجانده شوند. هرگاه مدل مستلزم مصالحه‌ای بود، دقت کنید که متغیرهایی حذف شوند که کمترین اهمیت را دارند. همواره باید به یاد داشته باشید که حذف یک یا چند متغیر مناسب، یاگنجاندن یک یا چند متغیر نامناسب، ممکن است به خطای تصریح بینجامد، که در جای خود می‌تواند قابلیت قبول مدل را در مطالعه تجربی پدیدهٔ اقتصادی کاهش دهد.

مدل تک‌معادله‌ای در برابر چند معادله‌ای

همین که متغیرهای مناسبی که باید در مدل گنجانیده شوند، انتخاب گردید، مهمترین و دشوارترین مرحله تصریح مدل، پایان یافته است. اکنون باید تصمیم گرفت که آیا یک تک معادله انتخاب شود یا یک مدل چند معادله‌ای. همچنین شکل دقیق معادله‌های ریاضی باید مشخص شود. با توجه به پیچیدگیهای محیط واقعی اقتصادی، نمی‌توان انتظار داشت که

---

1 . *A priori*

مدلهای تک‌معادله‌ای، بیان رضایت‌بخشی از پدیدهٔ اقتصادی مورد نظر ارائه دهند. با این حال، بیشتر مطالعات مربوط به تابع تولید کشاورزی از مدلهای تک معادله‌ای استفاده می‌کنند. دلیل آن، سادگی محاسباتیِ تخمین‌های این گونه معادله‌ها و نیز این فرض است که تورشِ همزمانیِ توابع تولید تک معادله‌ایِ خوب تصریح شده، کوچک است. این فرض بر این نکته استوار است که در کشاورزی بدلیل آن که وقفه قابل ملاحظه‌ای در تولید وجود دارد و به دلیل آن که خطا عمدتاً تحت تأثیر آب و هوا می‌باشد، داده‌ها معمولاً از پیش تعیین شده‌اند؛ وانگهی، پژوهشگر ممکن است بدلیل کمبود آمار، منابع مالی و زمان، مجبور شود چنین مدلهایی را برگزیند. گرچه ممکن است منطق و تئوری حکم کنند که مدلهای چند معادله‌ای مطلوب‌ترند، اما در پژوهش اقتصادی و بویژه در سطح خرد، کاربرد آنها بسیار محدود است. پیچیدگی تخمین این گونه مدلها و فقدان ابزارهای لازم برای برخورد با این پیچیدگی‌ها باعث شده است تا، حداقل در کشورهای در حال توسعه، این گونه مدلها برای اقتصاددانان کشاورزی گیرایی چندانی نداشته باشد.

نظریه اقتصاد ممکن است چیزی درباره شکل ریاضی دقیق تابع تولید و تعداد معادلات به ما نگوید. در این باره رسم اطلاعات واقعی بر روی نمودارهای دوبعدی بسیار سودمند است. برای این کار، در هر بار تنها دو متغیر را به کار بگیرید ـ ستاده را به نوبت همراه با تک‌تک متغیرهای نهاده‌ای. بررسی این گونه نمودارهای پراکنش معمولاً می‌تواند نکات سودمندی درباره مناسب‌ترین شکل ریاضی تابع به شما بدهد. روش سودمند این است که اشکال گوناگون خطی و غیرخطی را بیازمائید و آنگاه بر اساس ملاکهای معینی، رضایت‌بخش‌ترین شکلی را که تشخیص می‌دهید، انتخاب کنید.

معمولاً اگر یک مقدار معنی‌دار و تا حدود زیادی نزدیک به یک، برای R^2 وجود داشته باشد و ضرایب تخمین خورده، معنی‌دار و دارای علامت منطقی باشند، شکل تبعی را مناسب تلقی می‌کنند. برخی ازمعیارهای مهمی که در انتخاب یک شکل تبعی مناسب سودمند هستند، عبارتند از:

۱ـ پارامترهای کمتر

شکل تبعی نباید در برگیرندهٔ متغیرهای بیش از تعدادی باشد که دقیقاً برای وجود سازگاری با فرضیه‌های انگاشته شده، لازم است. تعداد اضافی پارامترها نه تنها موجب کاهش درجه آزادی می‌شود، بلکه ممکن است مسأله هم خطی را نیز جدی کند. یکی ازدلایل این که

تابع تولید کاب داگلاس[1] بسیار محبوبیت دارد، این است که درجه آزادی را کمتر کاهش می‌دهد.

۲ـ سادگی تفسیر

شکل‌های تبعی بسیار پیچیده ، ممکن است موجب پیامدهای نامطلوبی شوند که در عین حال به راحتی قابل شناسایی نیستند. همچنین ممکن است محاسبه برخی مقادیر، همچون کششهای جانشینی، از توابع پیچیده، دشوار باشد ـ اما نه ناممکن ـ بنابراین اشکال تبعی که دارای ساختار روشن همراه با پارامترهایی هستند که تفسیر اقتصادی آنها ذاتی و شهودی است، مرجح می‌باشند.

۳ـ سادگی محاسباتی

مدل‌های آماری که از نظر پارامترها،خطی می‌باشند، بخاطر سادگی محاسباتی شان و نیز بخاطر داشتن تئوری آماری کاملاً بسط یافته‌تر، فراگیر شده‌اند. پیشرفت‌های جاری در تکنولوژی محاسباتی هنوز برای فراگیر شدن اشکال تبعی غیرخطی، کفایت نمیکند.

۴ـ استحکام درون‌پو[2]

شکل تبعی باید در دامنهٔ داده‌های مشاهده شده، نسبت به فرضیه‌های انگاشته شده، خوش‌رفتار باشد.

۵ـ استحکام برون‌پو[3]

وقتی یک تابع برای پیش‌بینی بکار برده می‌شود، باید شکلی داشته باشد که با فرضیه‌هایی که برای خارج از دامنه داده‌های مشاهداتی انگاشته شده‌اند، سازگار باشد.

علامت و اندازه پارامترها

نظریه اقتصاد و پژوهش‌های کاربردی در زمینه‌های مربوطه می‌توانند اطلاعات

---

1 . Cobb - Douglas production function *2 . Interpolative robustness*

3 . Extrapolative robustness

سودمندی دربارهٔ جنبه‌های خاصی از محیط تولیدی در دست بررسی، ارائه دهند و سرنخ‌هایی دربارهٔ گنجاندن یا نگنجاندن برخی متغیرها در تابع تولید، نظیر این است که یک محدودیت غیرصفر و صفر بر مقدار پارامترهای مدل تحمیل کنیم. گرچه تعداد اولیه متغیرهای توضیحی بستگی بر طبیعت محیط تولیدی در دست بررسی دارد، اما تعداد متغیرهایی که سرانجام نگه داشته می‌شوند، در جای خود بستگی به این دارد که آیا تخمین پارامترهای مربوط به هر کدام از آنها، آزمونهای اقتصادی، آماری و اقتصادسنجی را باموفقیت پشت سرگذاشته‌اند یا نه.

در زیر، دستورالعمل‌هایی کلی برای کنارگذاشتن برخی متغیرهای توضیحی از تحلیل نهایی، ارئه شده‌اند :

۱- متغیرهای توضیحی که دارای علامت غلط می‌باشند (یعنی علامتی که با منطق شناخته شده اقتصادی یا زیست‌شناختی سازگار نمی‌باشد) باید حذف شوند.

۲- معنی‌دار بودن ضرایب تکی از نظر آماری - بر اساس کاربرد آزمون t - می‌تواند دستورالعمل دیگری برای حذف بعضی از متغیرها از مدل باشد. متغیرهایی را که خطاهای معیارشان (از نظر قدرمطلق) از ضرایب رگرسیونی مربوط به خودشان، بزرگتر است، می‌توان حذف کرد، مشروط بر آن که دلیل قوی‌ای برای نگهداری آنها در تابع وجود نداشته باشد.

۳-۲ - اندازه‌گیری و دسته‌بندی داده‌ها و ستاده‌ها

قابلیت اعتماد توابع تولید تخمین زده شده شدیداً به این مسأله بستگی دارد که داده‌ها و ستاده‌ها چگونه دسته‌بندی و اندازه گیری شده‌اند. درجه بالای ترکیب یا جمع‌بستن[1] یک تابع ممکن است باعث شود تابع برازش شده کاربرد محدودی در تصمیمات سیاست‌گذاری داشته باشد. این گونه توابع تولید تخمین‌زده شده ، به جای آن که بیانگر تابع واقعی باشند، ساخت نامتجانسی دارند که مربوط است به تفاوت در کیفیت نهاده‌هایی همچون زمین، کار و سرمایه.

در بهترین حالت، متغیرهای داده‌ای و ستاده‌ای باید بر اساس واحدهای فیزیکی اندازه گیری شوند و برای این کار باید روشهای استانداردسازی مناسبی به کار برد تا مقادیر عوامل با توجه به کیفیت‌های مختلفشان، تعدیل شوند. هرگاه نتوان همه عوامل تولید را به صورت واحدهای فیزیکی اندازه گرفت، مثل کالاهای سرمایه‌ای و خدمات در مطالعات

---

1 . Aggregation

کشاورزی، انواع ناهمگون نهاده‌های تولید را می‌توان بر حسب ارزش آنها، جمع زد. این فقط روشی است برای ساده کردن کار. به همین ترتیب، انواع مختلف یک محصول را نیز می‌توان بر حسب ارزش، جمع زد. کاربرد چنین توابعی که داده‌ها و ستاده‌های آنها بر حسب ارزش، اندازه‌گیری شده است، معمولاً محدود است به استفاده از آنها در برخی برنامه‌های مربوط به نظارت بر قیمت‌ها.

مشکلات اندازه‌گیری و دسته‌بندی، مربوط است به چهار طبقه‌بندی کلی عوامل تولید، یعنی زمین، کار، سرمایه و مدیریت. این مسائل در زیر بررسی می‌شوند.

زمیـن:

برای غلبه بر دشواری‌های مربوط به دسته‌بندی و اندازه‌گیری نهادهٔ زمین، چندین راه وجود دارد.

۱ـ نمونه مشاهدات را می‌توان به مزارعی محدود کرد که کیفیت زمین در آنها همگن است. بنابراین بر حسب انواع مختلف زمین، مثل زمین صددرصد آبی و زمین صـددرصد دیمی، می‌توان توابع تولید جداگانه‌ای برازش کرد.

۲ـ گاهی نهاده زمین را می‌توان بر این اساس که آیا آبیاری شده است یا آبیاری نشده، همسان سازی (استاندارد) کرد. همهٔ زمین‌های یک مزرعه را می‌توان به معادلهای یکدیگر، در واحد سطح، تبدیل کرد. یعنی مشخص کرد که همه زمین‌ها معادل با چند آکر[1] آبیاری شده یا چند آکر آبیاری نشده است. برای این کار باید بازده نسبی هر دو نوع زمین را در ناحیه مورد مطالعه، بدست آورد.

۳ـ درآمد زمین را نیز می‌توان برای همسان‌سازی گونه‌های کیفیتی مختلف زمین، به کار برد. در این باره فرض می‌شود که اختلافات کیفیتی زمین به خوبی در درآمدهای زمین بازتاب یافته است. درآمد زمین‌ها، در هند، در دورهٔ درازی در گذشته، تثبیت شده بود و اکنون شاید بیانگر هیچ گونه اختلافات کیفیتی نباشند.

۴ـ اجاره زمین در ناحیه مورد مطالعه، شاید شاخص بهتری، در مقایسه بادرآمد زمین، برای بیان کیفیت زمین باشد. اما دشواری آنجاست که رقم فرضی اجاره را نمی‌توان به آسانی از کشاورزان بدست آورد.

۵ـ قیمت بازاری زمین را نیز می‌توان برای بیان اختلافات کیفی زمینها به کار برد. در

---

۱. *acre* واحد اندازه‌گیری سطح، برابر با ۴۰۴۷ متر مربع ـ م.

این شاخص، فرض می‌شود تغییر موقعیت‌های زمینها، اثری بر قیمت آنها ندارد.

کـــار:

در بررسی‌های تابع تولید، باید به روشنی به خاطر داشت که برای تخمین، باید مقدار کار واقعاً استفاده شده را اندازه‌گرفت و نه مقدارکل کار موجود را. همه انواع کار انسانی، مثل کار مردان، زنان و بچه‌ها، باید به معادل کار روزانه یا ساعتی مرد، تبدیل شود. برای این کار، از اختلاف نرخ‌های دستمزد آنها، در ناحیه مورد بررسی، استفاده می‌شود. درباره انواع کار انسانی به‌کار گرفته شده، بطور ساده می‌توان اختلافات کیفیتی را با نرخ‌های دستمزد نشان داد و آنگاه تعدیلهای مناسب را انجام داد. اما این مسأله می‌تواند موجب دشواریهایی در محاسبهٔ کیفیت کار خانوادگی کارگر، پدید آورد. برای تصحیح اختلافات کیفیتی کار خانوادگی، به طور اختیاری می‌توان نرخ‌های دستمزد فرضی برای اعضای مختلف خانواده به‌کـار بـرد. هرگاه بخشی از کار انسانی اشتغال یافته، به طور قابل ملاحظه‌ای بزرگ باشد، بهتر است آن را به عنوان یک متغیر نهاده‌ای جداگانه در تابع تولید بگنجانیم.

کار گاو نر نیز در بیشتر توابع تولید کشاورزی، بویژه در هند، یک نهاده مهم دیگر است. بهتر است این نهاده را به عنوان یک متغیر جداگانه‌ای به شمار بیاوریم. و آن را بـه صورت تعداد روزها یا ساعت‌های کار گروهی گاوهای نر، اندازه‌گیری کنیم. در این باره اختلافات کیفیتی را گاهی می‌توان با تصحیح مقدار این نهاده از طریق مقدار جیره غذایی حیوانات، توضیح داد. ارزش بازاری یک گروه گاو نر، حتی می‌تواند تقریب بهتری برای کیفیت آنها باشد.

همواره بهتر است برای مزارع دارای گاو نر و مزارع دارای تراکتور، توابع تـولید جداگانه‌ای برازش شود.

سرمایـــه

دراین باره، معمولاً مسأله اندازه‌گیری و دسته‌بندی، دشوارتر است. معمولاً برخـی نهاده‌های سرمایه‌ای وجود دارند که بر حسب ارزش، اندازه‌گیری می‌شوند. جمع بستن کلی نهاده‌های سرمایه‌ای مختلف، در مطالعات موردی کشاورزی، ممکن است نتایج مطلوبی به دست ندهد. مثلاً به دست آوردن این نتیجه که برای سرمایه، $MC = MR$ است، می‌تواند گمراه کننده باشد، زیرا این احتمال وجود دارد که برای برخـی از اجـزاء سـرمایه، MC بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از MR باشد. بنابراین، بهتر آن است که سرمایه را به یک شکل تجزیه شده‌ای به‌کار بگیریم، یعنی تا حد ممکن، هرجزء آن را به عنوان یک نهادهٔ جداگانه‌ای به‌کار

ببریم. قاعدهٔ زیر، به پژوهشگر کمک می‌کند تا تصمیم بگیرد که آیا یک نهاده را به عنوان نوع جداگانه‌ای در نظر بگیرد یا نه: نهاده‌هایی که جانشین کامل یکدیگر هستند و نهاده‌های مکمل را باید به عنوان یک نهاده واحد در نظر گرفت؛ به زبان دیگر، انواع مختلف نهاده‌هایی که در تابع تولید در نظر گرفته شده‌اند، نباید جانشین کامل یا مکمل یکدیگر باشند. کاربرد درست این قاعده، منجر به توابع تولیدی می‌شود که برای استنتاج نتایج معتبر، به منظور استفاده در سیاست‌گذاری، مفیدترند.

معمولاً پژوهشگران گذشته، با نهاده‌های سرمایه‌ای به گونه‌های متفاوتی برخورد کرده‌اند. این مسأله عمدتاً بستگی به اهداف مطالعه دارد، اما معمولاً مخارج جاری نقدی سالانه، بذر، کود، استهلاک ماشین آلات و تجهیزات کشاورزی، ارزش اجاره‌ای مستغلات و مواردی از این قبیل، اجزاء سرمایه رادر توابع تولید کشاورزی تشکیل می‌دهند.

مدیریت:

در میان نهاده‌ها، اندازه گیری مدیریت، در یک تابع تولید کشاورزی، دشوارتر از همه است. تا امروز، اندازه گیری مدیریت و وارد کردن آن در یک تابع تولید، به گونه رضایت‌بخشی انجام نشده است. دو روشی را که تاکنون، باموفقیت اندکی، به وسیله پژوهشگران برای اندازه گیری و وارد کردن‌مدیریت در یک تابع تولید کشاورزی، به کار گرفته شده است، در زیر معرفی می‌کنیم.

۱ـ شاخص‌مدیریت:

شاخصی از ویژگیهای مدیریت، برای مدیران نمونه‌ای، تهیه می‌شود و به عنوان یک متغیر نهاده‌ای در تابع تولید به کار می‌رود. این گونه شاخص‌ها، ناقص هستند، زیرا:

الف) شاخص مدیریت، ممکن است تواناییهای مدیریتی (بکار گرفته شده یا بکار گرفته نشده) را اندازه بگیرد و نه مقدار واقعی توانایی بکار گرفته شده را ـ یعنی آن چیزی را که برای تابع تولید لازم است.

ب) وجود پیش‌داوریهای ذهنی در ساختن چنین شاخص‌ها.

ج) شاخصی از این دست، ممکن است میان دانش و منطق کارفرمایانه[1]، تفاوتی نگذارد.

1 . *Entepreneurial logic*

۲ـ روش باقی‌مانده‌ای[1]

بر اساس این روش، باقی‌مانده‌های میان مقادیر واقعی و مقادیر تخمین خوردهٔ متغیر وابسته، که از تابع تولیدی به دست آمده است که عامل مدیریت در آن وارد نشده است، به عنوان برآوردی از اثر نهادهٔ مدیریت در نظر گرفته می‌شود. این روش نیز ناقص است، زیرا این باقیمانده‌ها ممکن است فقط بیانگر اثر نهاده مدیریت نباشند، بلکه احتمالاً بیانگر اثـر تعدادی از عواملی است که در تابع تولید گنجانده نشده‌اند. از این گذشته، این روش، استفاده ناکارا از عوامل را بعنوان تقریبی برای مهارت مدیریت در نظر می‌گیرد، که جای پرسش دارد.

گریلیشیز[2] نشان داده است که اگر همبستگی مثبت معنی‌دار میان نهاده‌های مدیریت و سرمایه وجود داشته باشد، حذف نهاده مدیریت می‌تواند منجر بـه تـخمین کـمتر از حـدِ، بازده‌های مقیاس و تخمین بیش از حدِ، بازده‌های سرمایه شود. پژوهشگر برای غلبه بر این گونه کاستی‌ها می‌تواند به صورت زیر عمل کند.

الف) محدود کردن نمونه مزرعه‌ها به مزرعه‌هایی که کشاورزانشان، بر حسب توانایی و عملکردشان به عنوان مدیر، تا حدود مناسبی همگون و همانند هستند.

ب) انتخاب نمونه‌ای از مزارع که در آن، همبستگی میان مدیریت و دیگر نهاده‌ها حداقل باشد.

ج) استفاده از روش مناسبی برای اندازه گیریها نهاده در مدیریت و وارد کردن آن در تابع تولید.

اندازه‌گیری و دسته‌بندی ستاده‌ها

بیشتر کشاورزان، اغلب بیش از یک محصول تولید می‌کنند و حـتی یک مـحصول ممکن است دارای کیفیت و درجه‌های گوناگونی باشد. معمولاً، دشوار است که برای هر درجه خاصی از محصولات، بطور جداگانه تابع تولیدی تخمین زده شود. بـنابرایـن، پـژوهشگر درمی‌یابد که استفاده از مجموع ارزش ستاده، مناسب‌تر است. در این صورت، به طور ضمنی فرض می‌شود که محصولات با هم محاسبه شده، محصولات مشترک[3] هستند، که ممکن است همیشه درست نباشد. برای برخورد با این مشکل، دو راه وجود دارد :

1 . *Residual Approach*

2 . *Griliches*

۳. *Joint products* . وقتی از یک فرآیند تولید، الزاماً دو یا چند محصول بدست مـی‌آید، آنـها را محصولات مشترک می‌نامند. مثل تولید کاه و گندم در یک گندمزار ـ م .

۱- بهتر است تا حد ممکن، توابع تولید جداگانه‌ای برای محصولات مختلف و حتی برای درجه‌های مختلف هر محصول، برازش شود.

۲- اگر باید یک تابع تولید کشاورزی کلی تخمین زده شود، بهتر است نمونه مطالعاتی به مزارعی که در آنها، محصولات مختلف تقریباً با نسبت‌های یکسانی تولید می‌شوند، محدود گردد.

۳-۳- گردآوری اطلاعات

مطالعات مربوط به تابع تولید را تنها زمانی می‌توان به سوی دست‌یابی اهداف تصریح شده، هدایت کرد که داده‌های لازم برای متغیرهایی که در مدل گنجانده شده‌اند، برای پژوهشگر فراهم باشند. از دیدگاه یک اقتصاددان کشاورزی، اطلاعات را می‌توان به دو دسته کلیِ داده‌های آزمایشی و داده‌های غیرآزمایشی تقسیم کرد.

داده‌های آزمایشی[1]

داده‌های آزمایشی، در رشته کشاورزی، بیشتر به وسیله کارشناسان زراعی، خاک‌شناسان، حیوان‌شناسان، و مهندسین کشاورزی فراهم می‌آید. بنابراین، این دانش‌پژوهان، مجموعه ارزشمندی از داده‌های سودمند را فراهم می‌آورند که اگر در دسترس اقتصاددانان کشاورزی باشد، از آنها به گونه‌ای مفید در مطالعه رفتار اقتصادی استفاده می‌شود. این داده‌ها شامل : (الف) داده‌های مقطعی، (ب) داده‌های سری زمانی، یا (ج) سریهای زمانی از داده‌های مقطعی هستند.

داده‌های آزمایشی به دلیل دقت طرح آزمایشی، گزارش نویسی و کنترل برخی نهاده‌ها در سطح مورد نظر برای پژوهشگر، بسیار مفید هستند. اما یک آزمایش معمولاً بدون دخالت یک اقتصاددان کشاورزی برنامه‌ریزی می‌شود و مقادیر مختلف نهاده‌هایی که در آزمایش به کار رفته‌اند، ممکن است آنقدر زیاد متفاوت نباشد که بتوان آنها را به عنوان داده در تابع تولید به کاربرد، زیرا درجه آزادی بسیار پائین خواهد بود. مثلاً، اخیراً نزدیک به همه آمارهای آزمایشی مربوط به کود در هندوستان، برای برازش یک تابع واکنش، ناکافی تشخیص داده شده است. هدفی که یک زیست‌شناس در یک آزمایش دنبال می‌کند، ممکن است کاملاً متفاوت با هدفی باشد که یک اقتصاددان در کاربرد داده‌های آزمایشی موجود،

---

1 . *Experimental Data*

دنبال می‌کند. با این وجود، بدون همکاری واقعی دانشمندان در رشته‌های گوناگون، کاربرد داده‌های آزمایشی برای استنباط‌های اقتصادی، محدود خواهد بود. این خطر وجود دارد که بیشتر این گونه داده‌های آزمایشیِ مفید، به کار اقتصاددانان کشاورزی نیاید، به ویژه در کشورهای در حال توسعه‌ای همچون هند، مگر آن که مؤسسه‌های پژوهشی، همکاری میان متخصصین رشته‌های گوناگون علمی را عملی سازند.

داده‌های غیرآزمایشی[1]

داده‌های غیرآزمایشی، در انجام پژوهش‌های اقتصادکشاورزی، بسیار سودمندند. این داده‌ها شامل (الف) داده‌های سریهای زمانی)، (ب) داده‌های مقطعی، و (ج) سریهای زمانی داده‌هایِ مقطعی، می‌باشد.

داده‌های سری زمانی، اطلاعاتی درباره ارزشهای عددی متغیرها در دوره‌های مختلف، به دست می‌دهند. این داده‌ها عمدتاً از طریق سرشماریها، مثل سرشماری عمومی یا سرشماری کشاورزی، فراهم می‌آیند. داده‌های مقطعی عمدتاً از آمارهایی استخراج می‌شوند که به کمک مصاحبه‌های شخصی، یا بوسیله خود پژوهشگر یا بوسیله برخی سازمانها، فراهم آمده است. این گونه داده‌ها، اطلاعات مربوط به متغیرها را برای یک دوره معین زمانی بدست می‌دهند.

گاهی نیز سری زمانی داده‌های مقطعی در دسترس است.

پژوهشگران معمولاً در گردآوری داده‌های آماری، دو روش را بکار می‌گیرند :

۱ـ استفاده از داده‌هایی که قبلاً به منظور دیگری و به وسیله افراد یا سازمان‌های دیگری، گردآوری شده است.

۲ـ گردآوری مستقیم داده‌های لازم، از دست‌اندرکاران واقعی، به وسیله خود پژوهشگر ، یا فرد یا سازمان دیگری.

وقتی برای گردآوری داده‌ها، از روش اول استفاده می‌شود، پژوهشگر نظارت و کنترلی بر گردآوری داده‌ها ندارد. چراکه گاهی ممکن است مفاهیم کاملاً از مفاهیم رایج و پذیرفته، متفاوت باشد. در روش دوم، اگر شیوه پژوهش آماری، مبتنی بر روش یادآوری باشد، گردآوری داده‌ها در باره متغیرها، با خطا همراه خواهد بود. با این وجود، در شرایط یکسان، داده‌های غیرآزمایشی، نقریب بهتری از شرایط دنیای واقعی مملوّ از عدم اطمینان

---

1 . *Non - Experimental Data.*

ارائه می‌دهد. اگر منابع مالی کافی باشد، می‌توان داده‌های غیرآزمایشی دارای کیفیت بهتری گردآوری کرد، چرا که امکان بکارگیری افراد دارای شایستگی‌های مناسب و گسترش محدودهٔ مورد مطالعه را فراهم می‌آورد.

طبیعت بیشتر روشهای مختلف جمع‌آوری داده‌های آماری، به‌گونه‌ای است که آنها را مکمل یکدیگر می‌سازد و نه جایگزین همدیگر. برتری یک روش، عمدتاً با هزینه‌های نسبی که در بر دارد و با منافعی که از آن حاصل می‌شود، تعیین می‌گردد.

در این جا نباید یک نوع کاملاً مجزایی از داده‌ها راکه بوسیله خود اقتصاددان ساخته می‌شود، فراموش کنیم، یعنی متغیرهای موهومی[1] . این متغیرها زمانی به کار می‌آیند که برخی از عوامل مؤثر بر متغیرهای وابسته را، به خاطر طبیعت کیفی‌شان، نمی‌توان اندازه گیری عددی کرد.

شرایط داده‌های غیرآزمایشی

پیش از آن که داده‌های غیرآزمایشی را بتوان برای تحلیل تابع تولید و استنتاج نتایج معتبر به کار برد، این داده‌ها باید چند معیار را برآورده سازند. برخی از این معیارها چنین‌اند:

۱ـ مناسب بودن داده‌ها برای تابع تولید مورد مطالعه

البته چنین داده‌هایی را همیشه نمیتوان فراهم کرد، ممکن است برای همه متغیرهای مربوط، آمارهای ثبت شده‌ای وجود نداشته باشد، یا آمارها مربوط به مجموع نوع خاصی از نهاده‌ها باشد. این مسأله می‌تواند منجر به تخمین یک تابع تولید نامتجانس[2] به جای تخمین یک تابع تولید واقعی شود، این گونه مشکلات، در داده‌های حاصل از سرشماری، می‌تواند جدی‌تر و شدیدتر از داده‌های حاصل از پژوهش آماری باشد.

۲ـ داده‌ها باید دربرگیرندهٔ دامنه مناسبی از منحنی (رویهٔ) تولید باشند

پژوهشگر باید دامنه مناسب و مورد نظر را برای هر کدام از نهاده‌ها بداند. آنگاه باید مطمئن شود که داده‌ها به‌گونه‌ای هستند که بر روی این دامنه، گسترده شوند. بهترین روش این است که کل دامنهٔ یک نهاده به تعدادی دامنهٔ برابر تقسیم شود و آنگاه برای هر کدام از این زیردامنه‌ها، تعداد نسبتاً برابری مشاهده فراهم شود. در مطالعات میدانی، این کار نسبتاً ساده‌تر

---

1 . Dummy vatiable

2 . Hybrid production function

است.

۳ـ داده‌های همگن و ترکیب نشده

ناهمگونی و ترکیب (جمع‌بستن) داده‌ها منجر به تخمین‌های نامعتبر می‌شود. بنابراین، داده‌ها باید، تا حدی که منابع در دسترس پژوهشگر اجازه می‌دهند، همگن و ترکیب نشده باشند.

۴ـ مبنای اندازه‌گیری داده‌ها

ـمعقول این است که آمار مربوط، به نهاده‌ها و ستاده‌های مختلف بر اساس مقدار فیزیکی و نه بر اساس ارزش آنها ثبت شود. در این صورت، می‌توان برای تعدیل چنین داده‌هایی، به خاطر اختلافات کیفیتی، از شاخص‌های فیزیکی استفاده کرد. هرگاه داده‌های موجود بر اساس ارزش بیان شده باشند، بهتر آن است که در صورت امکان با استفاده از قیمت‌های رایج در آن زمان، آنها را به واحدهای فیزیکی تبدیل کنیم. توابع تولیدی که باداده‌های فیزیکی تخمین زده می‌شوند، از اختلاف در سیاستهای قیمتی تأثیری نمی‌پذیرند، بنابراین استفاده بیشتری دارند.

۳-۴-دشواریهای تخمین

پس از گردآوری داده‌ها دربارهٔ متغیرهای گوناگون نهاده‌ای و ستاده‌ای، لازم است به بررسی مسائل گوناگون تخمین، همچون مسأله تشخیص [1]، ترکیب، [2] همخطی مرکب [3] و نظایر آن بپردازیم.

تشخیص ، روشی است برای تعیین این که آیا ضرایب تخمین خورده، واقعاً همان ضرایبی است که پژوهشگر ممکن است برای متغیرها، از داده‌های کلی استفاده کند. مثلاً ترکیب (جمع‌زدن) داده‌های مربوط به افراد، مربوط به کالاها، مربوط به دوره‌های زمانی و ترکیبهای فضایی، از جمله مواردی هستند که منجر به ترکیب متغیرها می‌شود. همخطی مرکب وقتی رخ می‌دهد که یک یا چند جفت از متغیرهای مستقل، شدیداً همبستگی دارند و

1 . *Identification*
2 . *Aggregation*
3 . *Multicollinearity*

مشخص کردن اثر مستقل هر کدام از آنها بر متغیر وابسته، دشوار است. برای جزئیات بیشتر دربارهٔ مسائل تشخیص و ترکیب، خواننده می‌تواند به کتابهای درسی اقتصادسنجی مراجعه کند. اما در اینجا مسأله هم‌خطی مرکب را به تفصیل بررسی می‌کنیم.

هم‌خطی مرکب

هرگاه یک یا چند زوج متغیر توضیحی، آنچنان همبسته باشند که تغییراتشان تقریباً شبیه به هم باشد، در تخمین مدلهای تک‌معادله‌ای، بوسیله روش حداقل مربعات معمولی، مشکلی پدیدار می‌شود. این مشکل، مسأله هم خطی مرکب یا همبستگی متقابل[1] است. این مشکل، ذاتاً مربوط به داده‌های سری زمانی است، اما در داده‌های مقطعی نیز می‌تواند وجود داشته باشد. در مطالعات تابع تولید، پژوهشگران اغلب به این مشکل برخورد می‌کنند. مسأله هم خطی مرکب عموماً پیامدهای زیر را دارد :

۱ـ اگر ضریب همبستگی میان نهاده‌های X_i و X_j با $r_{xixj} = 1$، که $i \neq j$ است، داده شده باشد، ضرایب تخمین، نامعین داده می‌شوند و خطاهای معیار این تخمین‌ها بینهایت بزرگ خواهد شد.

۲ـ هرگاه $0 < r_{xixj} < 1$ باشد، که $i \neq j$ است، نتایج بیشتر، غیرقطعی خواهند بود. گرچه نظرات مخالف و شواهد بحث‌انگیزی وجود دارد، اما عموماً پذیرفته شده است که این شرایط منجر به خطاهای معیار فزاینده‌ای می‌شود که به نوبهٔ خود باعث تصریح غلط می‌گردد و تخمین‌ها ناتور باقی می‌مانند، اما بی‌دقت و ناپایدار می‌شوند.

دلایل هم‌خطی مرکب، عمدتاً عبارتند از تمایل متغیرهای اقتصادی به حرکت با همدیگر در طول زمان و وجود مقادیر با وقفه برخی از متغیرهای توضیحی، به عنوان متغیر مستقل جداگانه‌ای در مدل.

آزمون مسأله

چندین آزمون برای شناخت مسأله هم خطی مرکب وجود دارد. برخی از آزمون‌هایی که بیشتر به کار رفته‌اند را در این جا به گونه‌ای خلاصه می‌آوریم :

۱ـ آزمون کلین[2] :

این آزمون، یک محاسبه ساده است که به خاطر سادگی‌اش، در گذشته، عموماً مورد

1 . Intercorrelation

2 . Klein's Test

استفاده پژوهشگران گوناگون بوده است. اِل آر. کلین[1] تنها وقتی وجود هم‌خطی مرکب را به عنوان یک مشکل می‌پذیرد که:

$$r^2_{x_i x_j} \geq R^2_{y \cdot x_1 x_2 \dots x_i}, \qquad i \neq j \qquad (۱-۳)$$

که در آن r_{xixj} نشان دهنده همبستگی ساده میان iاُمین و jاُمین متغیر توضیحی است و R^2 ضریب تعیین چندگانه[2] می‌باشد.

۲ـ قاعده تجربی:

یک روش بسیار ساده‌ای که در بسیاری از مطالعات گذشته مورد استفاده قرار گرفته است، این است که هم‌خطی مرکب را خطرناک می‌شناسد، تنها اگر:

$$r_{x_i x_j} \geq 0.80, \qquad i \neq j \qquad (۲-۳)$$

این روش، تنها دارای سادگی عملی است و کلاً آزمون خوبی نیست. تیل[3] بحث می‌کند که هم‌خطی مرکب حتی وقتی ضرایب همبستگی متقابل میان متغیرهای توضیحی (r_{xixj}) کوچک باشد، می‌تواند به عنوان یک مشکل تلقی شود.

۳ـ روش مبتنی بر تحلیل تلاقی فریش[4]:

این روش عبارت است از انجام رگرسیون متغیر وابسته، به طور جداگانه بر روی هر x_j، که از این طریق، رگرسیون‌های اولیه به دست می‌آیند. آنگاه یکی از این رگرسیون‌ها انتخاب می‌شود. این انتخاب بر اساس ملاک‌های آماری و از پیش تعیین شده انجام می‌گیرد، یعنی هر کدام از رگرسیون‌هایی که با توجه به این ملاک‌ها، نتایج قابل قبول‌تری بدست بدهد، انتخاب می‌شود. آنگاه متغیرهای توضیحی دیگر به تدریج یک به یک وارد رگرسیون می‌شوند و با توجه به اثرشان بر ضرایب منفرد، خطاهای معیار، و R^2، به عنوان متغیرهای مفید، زاید یا زیان‌بخش تعیین می‌شوند.

---

1 . L.R.Klein

2 . Coefficient of multiple determination

3 . Theil

4 . Frisch's Confluence Analysis

۴ـ آزمون فارا ـ گلوبر [1] :

این آزمون شامل سه آزمون جداگانه می‌باشد :

الف) آزمون خی‌دو (χ^2) برای بررسی وجود و شدت هم‌خطی مرکب. فرضیه‌ای که آزمون می‌شود این است که متغیرهای توضیحی متعامد هستند، یعنی :

$(i=1)$، $r_{xixj}=1$ و $r_{xixj} = 0\ (i \neq j)$، که در این جا :

$$\chi^{*2} = -\left[m - 1 - \frac{1}{6}(2k + 5)\right] \ln \begin{bmatrix}\text{value of the standardized} \\ \text{determinant}\end{bmatrix}$$

که در آن، m حجم نمونه است و k تعداد متغیرهای توضیحی، و درجه آزادی مساوی $\frac{1}{2} k\ (k-1)$ می‌باشد. همچنین ،

$$\text{Standardized determinant} = \begin{bmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_k} \\ r_{x_2x_1} & r_{x_2x_2} & \dots & r_{x_2x_k} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ r_{x_mx_1} & r_{x_mx_2} & \dots & r_{x_mx_k} \end{bmatrix}$$

اگر $\chi^{*2}>\chi^2_t$ باشد، که χ^2_t ارزش جدولی χ^2 با درجه آزادی $\frac{1}{2}k(k-1)$ در یک سطح احتمالِ مورد قبول، می‌باشد، آنگاه پژوهشگر وجود هم‌خطی مرکب را می‌پذیرد.

(ب) آزمون F برای تعیین محل هم‌خطی مرکب. این آزمون کمک می‌کند تا متغیرهای توضیحی که دارای هم‌خطی مرکب هستند را پیدا کنیم. در این مورد، $R^2x_1, x_2x_3,...,x_k$ و $R^2x_2x_{13},...,x_k$ و الی آخر محاسبه می‌شوند و به کمک آنها، آزمونهای F زیر انجام می‌شود تا اهمیت آنها بررسی شود :

$$F^* = \frac{(R^2_{x_i,\, x_1x_2 \dots x_{i-1}x_{i+1} \dots x_k})/(k-1)}{(1-R^2_{x_i,x_1x_2 \dots x_{i-1}x_{i+1} \dots x_k})/(m-k)}$$

1 . The farrar - Glauber test

ارزش F در یک سطح احتمال پذیرفته شده را با درجه‌های آزادی $U_1 = k\text{-}1$ و $U_2 = m\text{-}k$ در جدول می‌بینیم. فرض کنید این ارزش، F_t باشد. اکنون اگر $F^*>F_t$، آنگاه می‌پذیریم که متغیر X_i دارای هم‌خطی مرکب است.

(ج) آزمون t برای شناختن الگوی هم‌خطی مرکب. در این مرحله، پژوهشگر متغیرهایی را که باعث هم‌خطی مرکب شده‌اند، شناسایی می‌کند. برای انجام این کار، ضرایب همبستگی جزئی برای همه ترکیب‌های $x_i x_j$ محاسبه می‌شود و معنی‌دار بودن آنها با آزمون t زیر بررسی می‌شود:

$$t^* = \frac{(r_{x_i x_j,\, x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1}, \ldots x_{j-1} x_{j+1} \ldots x_k})/\sqrt{m-k}}{\sqrt{(1 - r^2_{x_i x_j,\, x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_{j-1} x_{j+1} \ldots x_k})}}$$

اگر $t^*>t_t$ بود، که t_t ارزش جدولی t با درجه‌آزادی $m\text{-}k$، در یک سطح احتمال پذیرفته شده، می‌باشد: آنگاه x_i و x_j مسئول هم‌خطی مرکب شناخته می‌شوند.

راه حل مسأله

چند راه حل برای مسأله هم‌خطی مرکب در زیر آورده شده‌اند:

۱- اگر هم‌خطی مرکب جدی نیست، می‌توان با آن مدارا کرد.

۲- اگر هم‌خطی مرکب در برخی متغیرهای غیراستراتژیک اثر می‌گذارد، می‌توان آنها را از معادله حذف کرد.

۳- اگر هم‌خطی مرکب در برخی از ضرایب رگرسیونی، a_j ها، اثر می‌گذارد، آنگاه:

(الف) می‌توان a_j های قابل اعتماد را برای هر هدفی یا برای پیش‌بینی، بکار برد؛ و

(ب) همه این تخمین‌ها را می‌توان برای پیش‌بینی به کار برد.

۴- گنجاندن اطلاعات مقداری اضافی، یعنی (الف) روش حداقل مربعات مقید، (ب) ترکیب داده‌های مقطعی و سری زمانی، (ج) تعبیر دوربین[1] از حداقل مربعات تعمیم یافته، و (د) تکنیک تخمین مرکب[2] پیشنهاد شده بوسیله اچ.تیل[3] و اِ.س. گلدبرگر.[4]

---

1 . Durbin

2 . Mixed Estimation Technique

3 . H.Theil

4 . A.S.Goldberger

۵ـ افزایش حجم نمونه با گردآوری مشاهدات بیشتر.

۶ـ جایگزین کردن متغیرهای وقفه‌ای به جای دیگر متغیرهای توضیحی در مدلهای توزیع وقفه‌ای.

۷ـ وارد کردن معادلات دیگری در مدل اقتصادی، بر اساس تئوری.

۸ـ استفاده از روش «مؤلفه‌های اصلی».[۱]

۳-۵ـ تکنیک‌های اقتصادسنجی برای تخمین تابع تولید

ضرایب مدل اقتصادی را می‌توان با استفاده از روشهای تخمین تک‌معادله‌ای و روشهای معادلات همزمان، تخمین زد. این روشها در زیر معرفی می‌شوند.

روشهای تخمین تک‌معادله‌ای[۲]

این روشها برای تخمین یک معادله، در هر بار، بکار می‌روند. مهم‌ترین آنها عبارتند از :

۱ـ حداقل مربعات کلاسیک، که بعنوان روش حداقل مربعات معمولی[۳] نیز شناخته شده است.

۲ـ روشِ شکلِ خلاصه شده، که روش حداقل مربعات غیرمستقیم[۴] نیز خوانده می‌شود.

۳ـ روش حداقل مربعات دومرحله‌ای[۵].

۴ـ روش حداکثر راستنمایی با اطلاعات محدود[۶].

۵ـ دیگر روشهای تخمین مرکب[۷].

روشهای معادلات هم‌زمان[۸]

این روشها برای تخمین یکجای ضرایب همه معادلات بکار می‌روند. دو روش عمومی‌تر تخمین دراین‌باره عبارتند از :

---

1 . *Principal Components*

2 . *Single Equation Estimation Techniques*

3 . *Ordinary Least Squares Method*

4 . *Indirect Least Squares Technique*

5 . *Two - stage Least Squares Method*

6 . *Limited Information Maximum Likelihood Method*

7 . *Mixed Estimation*

8 . *Simultaneous Equation Techniques*

عمومی‌تر تخمین دراین‌باره عبارتند از :

۱ـ روش حداقل مربعات سه‌مرحله‌ای[1]

۲ـ روشهای حداکثر راستنمایی با اطلاعات کامل.[2]

انتخاب نهایی یک روش خاص تخمین، بستگی به چندین مسأله دارد، مسائلی همچون :

۱ـ طبیعت رابطه و شرط تشخیص آن

۲ـ ویژگی‌های تخمین‌های بدست آمده از هر روش تخمین (یک تخمین خوب دارای ویژگیهای ناتوری، سازگاری، کارایی و جامعیت).

۳ـ ویژگیهای مطلوب تخمین، با توجه به اهداف تحقیق ـ اهدافی مثل تحلیل، سیاست‌گذاری و پیش‌بینی.

۴ـ سادگی روش.

۵ـ زمان و هزینه لازم برای روشهای گوناگون.

جزئیات این موضوعات، فراتر از محدودهٔ این کتاب است. اما خواننده علاقمند برای جزئیات بیشتر می‌تواند به کتابهای درسی اقتصادسنجی مراجعه کند.

۳-۶ـ ارزیابی تخمین‌ها

پس از آنکه تابع تولید تخمین زده شد، گام بعدی ارزیابی نتایج بدست آمده است. این مرحله، دربرگیرنده ملاکهای مربوط به تصمیم‌گیری در این‌باره است که آیا تخمین‌های پارامترها از نظر تئوری و از نظر آماری معنی‌دار هستند یا نه. ملاکهای مختلفی که برای ارزیابی تخمین‌ها بکار می‌روند، اقتصادی، آماری و اقتصادسنجی هستند، که در زیر به توضیح آنها می‌پردازیم.

ملاکهای اقتصادی

این ملاکها را تئوری اقتصاد معین می‌کند و مربوط است به علامت و اندازه پارامترهای تابع تولید. تئوری اقتصاد محدودیت‌هایی بر مقادیر ثابت مدل اقتصادی، قرار می‌دهد؛ مقادیر ثابتی همچون کشش‌ها، تولیدهای نهایی، نرخ جانشینی فنی و بازده‌های نسبت

1 . *Three - stage Least Squares Method*

2 . *Full Information Maximum Likelihood Techniques*

به مقیاس. هرگاه تخمین‌های پارامترها با علامت‌ها و اندازه‌هایی که تئوری اقتصادی در نظر گرفته است، سازگار نباشند، آنها را باید کنار گذاشت یا به عنوان تخمین‌های غیررضایت‌بخش تلقی کرد.

ملاکهای آماری

ملاکهای آماری برای آزمون قابلیت اعتماد آماری تخمین‌های پارامترها طراحی شده‌اند. ملاکهایی که بیش از همه به‌کار می‌روند، عبارتند از : خطاهای معیار تخمین‌ها و ضریب تعیین چندگانه. از آنجاکه تخمین‌های تابع تولید از نمونه‌ها، استنتاج می‌شوند، نظریه نمونه‌گیری آمار، آزمونهای سودمندی ارائه می‌کند تا درستی نمونه‌ها تحقیق شود.

در این جا باید یادآوری کرد که ملاکهای آماری بی‌گمان، بسیار سودمند و کمک‌کننده می‌باشند، اما آنها در مقایسه با ملاکهای نظری اقتصادیِ از پیش تعیین شده، دارای درجه دوم اهمیت هستند. مثلاً تخمین‌های دارای علامت غلط باید کنار گذاشته شوند، حتی اگر ضریب تعیین چندگانه بسیار بزرگ باشد، یا خطاهای معیار آنها آنقدر کوچک باشد که آنها را از نظر آماری معنی‌دار بسازد.

ملاکهای اقتصادسنجی

اینها آزمونهای مرتبه دومی هستند برای تعیین قابلیت اعتماد ملاکهای آماری به‌کار گرفته شده. اینهاکمک می‌کنند تا تعیین کنیم آیا تخمین‌ها دارای ویژگی‌های مطلوبی همچون ناتوری، سازگاری، کارآیی و جامعیت هستند یا نه. بنابراین، هدف ملاکهای اقتصادسنجی، تعیین صحت یا نقض فروض اقتصاد سنجی انگاشته شده، می‌باشد.

اگر فروض روش اقتصادسنجی بکار گرفته شده، برآورده نشوند، آنگاه تخمین‌های پارامترها تورش دار می‌شوند، یا این که ملاکهای آماری اعتبار خودشان را از دست می‌دهند و دیگر به آنها نمی‌توان در تعیین معنی‌دار بودن آماری، اعتماد کرد.

۳-۷- استنتاج مقادیر مورد نظر

هدف تخمین یک مدل اقتصادی خاص یا یک تابع تولید، بدست آوردن مقادیر گوناگون اقتصادی است. این گونه مقادیر دربرگیرنده تولید نهایی و متوسط، کشش تولید و بازده‌های نسبت به مقیاس، تولید همسانها و نرخهای جانشینی فنی، خطوط هم‌شیب، مسیر

توسعه، معادلات خط مرزی[1] وکشش جانشینی می‌باشند. این مقادیر قبلاً در فصل ۲ به تفصیل بررسی شدند. این مقادیر، برای فهم اقتصادی اطلاعات داده ـ ستاده‌ای و شکل ریاضی برازش شده توابع تولید، اهمیت اساسی دارند. اعتبار استنتاجها و نتایجی که با استفاده از یک مدل اقتصادی درباره محیط اقتصادی مورد بررسی گرفته می‌شوند، بستگی به این مقادیر دارد. بنابراین، این مقادیر بعنوان ابزارهایی برای دست‌یابی به اهداف موردنظر، عمل می‌کنند.

تمرین:

۳-۱ نکات مهمی که هنگام تصریح یک مدل اقتصادی باید در نظر داشت،کدامند، به طور خلاصه توضیح دهید.

۳-۲ درباره دستورالعمل‌های کلی که پژوهشگر را در انتخاب شکل مناسبی از تابع تولید یاری می‌دهند، بحث کنید. در عمل، تا چه حد به «سادگی محاسباتی» دستیابی پیدا شده است؟

۳-۳ دشواریهای اندازه گیری و دسته‌بندی مربوط نهاده‌های زمین، کار، سرمایه و مدیریت کدامند؟ چگونه می‌توان بر این دشواریها چیره گشت؟

۳-۴ روشهای گوناگون گردآوری داده‌های مناسب برای مطالعات تابع تولید، کدامند؟ کدام را ترجیح می‌دهید و چه موقع؟

۳-۵ «دقت در جمع آوری داده‌ها، بسیار مهم‌تر از شکل مدل اقتصادی است». درباره این جمله بحث کنید.

۳-٦ دشواریهای مهم تخمین تک‌معادله‌ای کدامند؟ کدام یک از آنها در مطالعات مربوط به تابع تولید بیشتر عمومیت دارد؟

۳-۷ هم‌خطی مرکب چیست؟ چگونه می‌توانید وجود و شدت آن را آزمون کنید؟ درباره روشهای مناسب حل این مشکل، بحث کنید.

1 . *Ridge line equations*

منابع برای مطالعه بیشتر

Griliches, Zvi, "Specification Bias in Estimates of Production Functions", *Journal of Farm Economics*, **39**(1), 1957, pp 8–20.

Heady, E.O. and J.L. Dillon, *Agricultural Production Functions*, Iowa State University Press, Ames, Iowa, 1961, Chs. 5 and 6.

Koutsoyiannis, A., *Theory of Econometrics*, 2nd ed., MacMillan, London, 1977, Ch. 2.

Perrin, R.K., "The Value of Information and the Value of Theoretical Models in Crop Response Research", *American Journal of Agricultural Economics*, **58**(1), 1976, pp 54–61.

Rao, V.M., "A Note on the Practice of Standardization of Land in Farm Production Function Studies", *Indian Journal of Agricultural Economics*, **31**(**2**), 1976, pp 63–65.

فصل چهارم

اشکال مختلف توابع تولید

اشکال مختلف توابع تولید، خصوصاً در ارتباط با شکلهای ریاضی و نموداری آنها در این فصل بطور مفصل مورد بحث قرار می‌گیرند. چگونگی استخراج تولید متوسط، تولید نهائی، کشش تولید، منحنی‌های تولید همسان، نرخ جانشینی فنی، خطوط هم‌شیب، خطوط مرزی و کشش جانشینی برای هر تابع در این فصل توضیح داده شده است.

۴-۱ تابع تولید خطی[1]

همانطوریکه درباره تابع چندجمله‌ای درجه یک اطلاع دارید، تابع تولید خطی ساده‌ترین شکل تمامی توابع تولید مورد استفاده در کشاورزی است. اشکال ریاضی این تابع یک، دو و n نهاده متغیر به ترتیب عبارتند از :

$$y = a_0 + a_1x_1 \qquad (۱-۴)$$

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \qquad (۲-۴)$$

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_ix_i \qquad (۳-۴)$$

نمودار رابطه (۴-۱) در شکل (۴-۱) نشان داده شده است، که a_0 عرض از مبدأ و a_1

---

1 . Linear production function

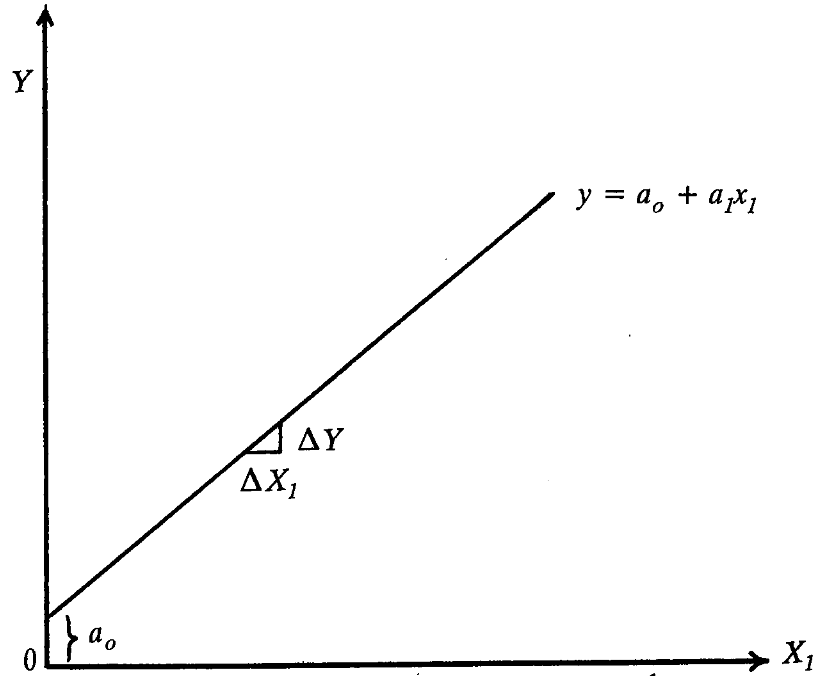
شیب تابع تولید است. با وجود اینکه تابع تولید خطی، یک تابع ساده است ولی این تابع در تحقیقات کشاورزی مورد استفاده قرار نمی‌گیرد. شاید تنها موردی که این شکل تابع تولید بصورت گسترده در بررسیهای اقتصادی مورد استفاده قرار گرفته است، در مطالعه تحقیقات کشاورزی مدیریت مزرعه[1] در هند، طی ۲۵ سال می‌باشد. علت اصلی در محدودیت کاربرد این تابع برای تجزیه و تحلیل اقتصادی، مسأله نقض ویژگیهای فروض اصلی تجزیه و تحلیل تابع است. برای مثال، نه مشتق مرتبه دوم این تابع کوچکتر از صفر است، یعنی $\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}$ و نه بازده‌های ناشی از مقیاس آن نزولی است، یعنی :

$$\Sigma \{ (\frac{x_i}{y})(\frac{\partial y}{\partial x_i}) \} < 1$$

در این تابع این موارد بدین صورت می‌باشند :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} = 0 \quad \text{و} \quad \Sigma \{ (\frac{x_i}{y})(\frac{\partial y}{\partial x_i}) \} = 1$$

در این تابع بازده نسبت به مقیاس ثابت بیان شده است. در هر صورت بعضی از نتایج مهم تابع تولید خطی را در اینجا بطور خلاصه مورد بحث قرار می‌دهیم.



شکل (۴-۱) : تابع تولید خطی با یک نهاده متغیر

1 . Farm Management

تولید متوسط[1] (AP)

از رابطه (۴-۱) ، AP_1، تولید متوسط نهاده X_1را می توان بدست آورد، بطوری که :

$$AP_1 = \frac{a_1 x_1}{x_1} = a_1 \tag{۴-۴}$$

بدین ترتیب AP_1بدون توجه به سطح نهاده مورد استفاده یک مقدار ثابت است.

تولید نهائی[2] (MP)

تولید نهائی نسبت به نهاده X_1از تابع تولید (۴-۱) عبارتست از :

$$MP_1 = \frac{dy}{dx_1} = a_1 \tag{۴-۵}$$

بنابراین همانند AP_1، MP_1نیز بدون توجه به سطح نهاده X_1یک مقدار ثابت است.

از روابط (۴-۴)، (۴-۵) به وضوح مشخص است که برای یک تابع تولید خطی، برای تمامی سطوح نهاده مورد استفاده، $AP_1=MP_1$است. این خاصیت براحتی می‌تواند به $AP_i=MP_i$، $i = 1, 2, \dots , n$،تعمیم داده شود.

منحنی تولید همسان

چنانچه می‌دانیم، برای رسم نمودار منحنی تولید همسان، دو نهاده لازم است. از این رو تابع تولید داده شده بوسیله رابطه (۴-۲) با دو نهاده متغیر مورد بحث خواهد بود. معادله منحنی تولید همسان مربوط به تابع تولید رابطه (۴-۲) با سطح ثابت ستاده y عبارتست از :

$$x_1 = \frac{y^0 - a_0}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} x_2 \tag{۴-۶}$$

حال اجازه بدهید به جای $\frac{a_2}{a_1}$و $\frac{Y^0-a_0}{a_1}$به ترتیب b_1و b_0قرار بدهیم. بدین ترتیب رابطه (۴-۶) را می توان این گونه نوشت :

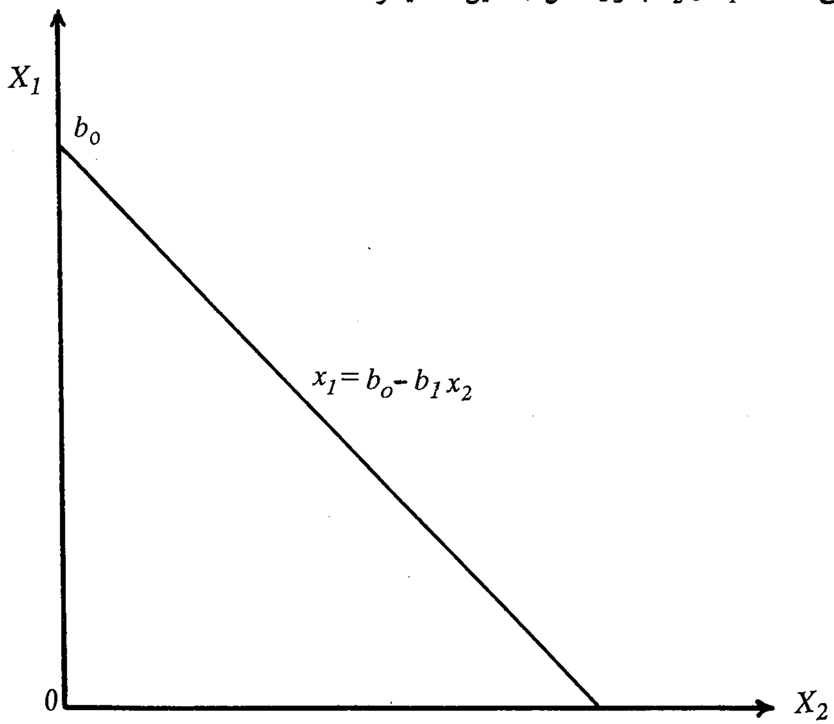
---

1 . Average product

2 . Marginal product

$$x_1 = b_0 - b_1 x_2 \tag{۷-۴}$$

نمایش نموداری این چنین معادله‌ای برای منحنی تولید همسان در شکل (۴-۲) ارائه شده است، که منحنی تولید همسان مربوط به تابع تولید خطی و دارای شیب نزولی است. این نشان می‌دهد که X_1 و X_2 بطور کامل جانشین همدیگرند.



شکل (۴-۲) : منحنی تولید همسان خطی مربوط به تابع تولید خطی

اما تجربه عمومی، نشان می‌دهد که یک چنین رابطه جانشینی بین نهاده‌ها کاملاً کمیاب است. هرگاه یک چنین رابطه‌ای پیدا شود، همواره باید دو نهاده‌ای راکه چنین رابطه‌ای دارند، با هم جمع کنیم و با آن بعنوان یک نهاده یگانه، رفتار کنیم.

نرخ جانشینی فنی (RTS_{21})

از رابطه (۴-۶) ، می‌توان RTS_{21} را بدست آورد، بطوری که :

$$RTS_{21} = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_2}{a_1} \tag{۸-۴}$$

بدین ترتیب، RTS_{21} نرخ جانشینی فنی نهاده x_2 برای x_1 می‌باشد که مساوی با مقدار ثابت است، یعنی $\frac{a_2}{a_1}$. بنابراین هرگاه یک تابع تولید خطی مورد استفاده قرار گیرد، دو نهاده با یک نرخ ثابت جانشین همدیگر می‌شوند.

خطوط شیب همسان

وقتی معادله خط شیب همسان عبارتست از :

$$-\frac{dx_1}{dx_2} = c$$

که c مقدار ثابت، مثبت و واقعی است. این مورد را چون خطوط شیب همسان تعریف نشده‌اند، نمی‌توان حل نمود.

خطوط مرزی

در آنجایی که خطوط مرزی شیب همسان تعریف نشده‌اند، خطوط مرزی نیز برای این تابع تولید (خطی) بدون تعریف می‌باشند.

کشش تولید (Ep)

کشش تولید EP_i نسبت به هر نهاده X_i برابر با واحد است، یعنی :

$$E_{p_i} = \frac{MP_i}{AP_i} = \frac{a_i}{a_i} = 1 \qquad (۹-۴)$$

این موضوع دلالت بر این دارد که یک درصد افزایش در سطح نهاده X_i دقیقاً موجب یک درصد افزایش در سطح ستاده Y می‌گردد. بعبارت دیگر، دو برابر نمودن نهاده، موجب دوبرابر گردیدن ستاده می‌شود. وقتی تمامی نهاده‌های دیگر در سطح معینی که باید باشند، ثابت بمانند.

کشش جانشینی (Es)

از تابع تولید خطی رابطه (۴-۳)، کشش جانشینی بین نهاده‌های j و i بدست می‌آید، بطوری که می‌توان نوشت :

$$ES_{ji} = \frac{\%\,\Delta(x_i/x_j)}{\%\,\Delta(-dx_i/dx_j)}$$

اما برای یک تابع تولید خطی، $\frac{dx_i}{dx_j}$ بطور کلی ثابت است. بدین ترتیب در منحنی تولید

همسان داده شده، $0 = (- \frac{dx_i}{dx_j})$ است. لذا، $Es_{ji} = \infty$ است. بدین معنی که تغییرات جزئی معینی در $\frac{Px_j}{Px_i}$ موجب تغییرات ناپیوسته در $\frac{x_i}{x_j}$ می‌شود، مثلاً از یک نقطه مرزی به نقطه مرزی دیگر.

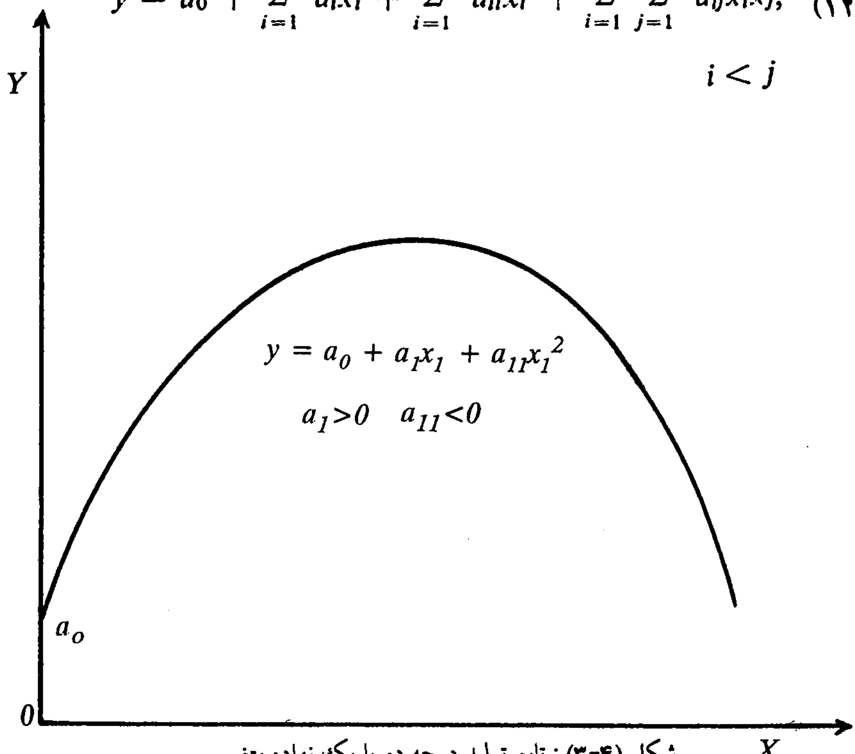
۴-۲ تابع تولید درجه دوم[1]

یک چند جمله‌ای درجه دوم، با اشکال جبری یک، دو و n نهاده متغیر به ترتیب عبارتند از :

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_{11}x_1^2 \quad (۴-۱۰)$$

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{12}x_1x_2 \quad (۴-۱۱)$$

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_ix_i + \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \quad i < j \quad (۴-۱۲)$$



شکل (۴-۳) : تابع تولید درجه دو با یک نهاده متغیر

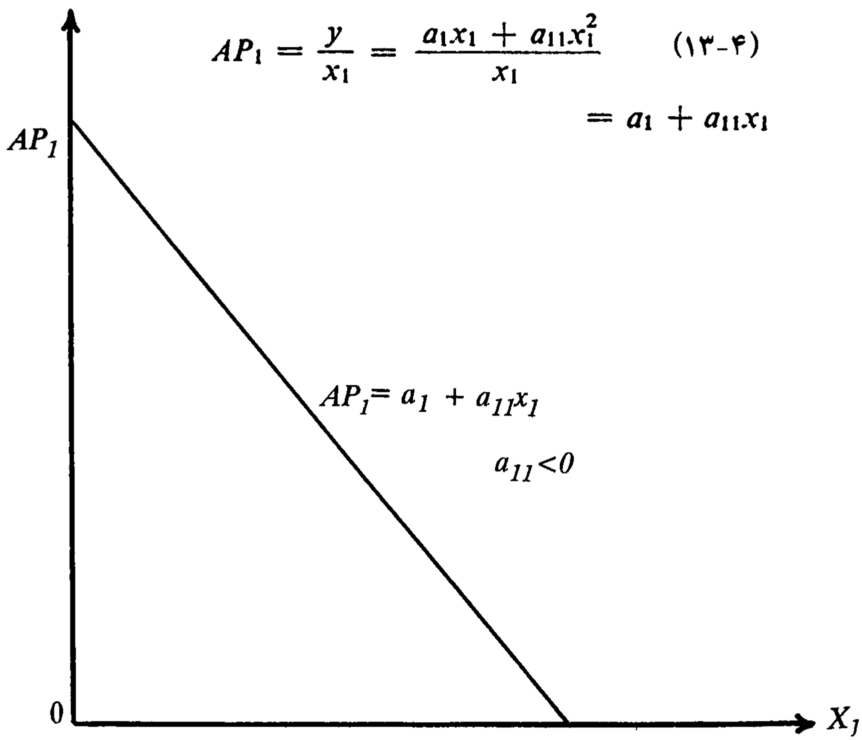
1 . Quadratic production function

در یک تابع درجه دوم خوش‌رفتار[1] ، مانند (۴ـ۱۰) که نسبت به محور نهاده، مقعر است و دارای منحنی‌های تولید همسان محدب و منحنی‌های تبدیل محصول[2] مقعر، نسبت به مبدأ مختصات است، $a_{11}<0$ می‌باشد. یکی از چندین شکل ممکن نموداری چنین تابعی، در شکل (۴ـ۳) نشان داده شده است. منحنی محصول کل، به شکل یک منحنی قرینه[3] است، که حداکثر ستاده y در نقطه $x_1 = \frac{-a_1}{2a_{11}}$ بدست می‌آید. اینگونه توابع را محققانی که به بررسی اثر مقدار کود بر محصولات کشاورزی می‌پردازند، بطور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌دهند.

تولید متوسط *(AP)*

بطور مختصر با توجه به بخش واکنش تابع تولید، تولید متوسط نسبت به نهاده X_1 یعنی، AP_1 را می‌توان از رابطه (۴ـ۱۰) بدست آورد، بطوری که :

$$AP_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{a_1x_1 + a_{11}x_1^2}{x_1} = a_1 + a_{11}x_1 \qquad (۴\text{-}۱۳)$$



شکل (۴-۴) : تولید متوسط نهاده X_1، استخراج شده از تابع تولید درجه دوم

---

1 . *Well - behaved quadratic production function*

2 . *Product Transformation curves* 3 . *Mirror curve*

بصورت نموداری، AP_1مربوط به تابع تولید درجه دوم با $a_{11}<0$در شکل (۴-۴)، نشان داده شده که یک منحنی خطی نزولی یکنواخت است. این تابع را بطور مثبت یا منفی هم نیز می‌توان درنظر گرفت. AP_1محورهای x_1و yرا در جائیکه $x_1 = 0$ و $x_1 = \frac{-a_1}{a_{11}}$است قطع می‌کند، بخاطر داشته باشید که تحت شرایط معمولی $a_1>0$ و $a_{11}<0$ است، بنابراین سطح نهاده X_1در جائیکه AP_1محور x_1را قطع می‌کند، مثبت است.

تولیدنهائی (MP)

تولیدنهائی نسبت به نهاده X_1، یعنی MP_1را می‌توان از رابطه (۴-۱۰) بدست آورد، بطوری که :

$$MP_1 = \frac{dy}{dx_1} = a_1 + 2a_{11}x_1 \qquad (۴\text{-}۱۴)$$

در حالت معمولی، وقتی که $a_{11}<0$است، MP_1 نیز همانند AP_1یک منحنی خطی نزولی یکنواخت است، اما نرخ کاهش آن، دو برابر می‌باشد. MP_1می‌تواند هم نزولی و هم منفی باشد، ولی نمی‌تواند هم افزایشی و هم کاهشی باشد. در سطح $x_1 = -\frac{a_1}{2a_{11}}$که ستاده کل، حداکثر است، MP_1صفر می‌باشد. این مقدار، نیمی از آن مقدار نهاده X_1 است، که در آن، تولید متوسط صفر می‌شود.

کشش تولید (E_p)

کشش تولید نسبت به نهاده X_1یعنی Epرا می‌توان بدست آورد، بطوری که

$$E_{p1} = \frac{MP_1}{AP_1} = \frac{a_1 + 2a_{11}x_1}{a_1 + a_{11}x_1} \qquad (۴\text{-}۱۵)$$

بدین ترتیب، Ep_1تابعی از x_1، سطح نهاده X_1است. وقتی $a_{11}<0$است، کشش تولید با افزایش x_1 کاهش می‌یابد.

منحنی تولید همسان

معادله منحنی تولید همسان را می‌توان از تابع درجه دوم (۴-۱۱) داده شده با دو

نهاده متغیر، استخراج نمود.

$$x_1 = \frac{-(a_1 + a_{12}x_2) \pm [(a_1 + a_{12}x_2)^2 - 4a_{11}(a_0 + a_2x_2 + a_{22}x_2^2 - y^0)]^{.5}}{2a_{11}} \quad (۴-۱۶)$$

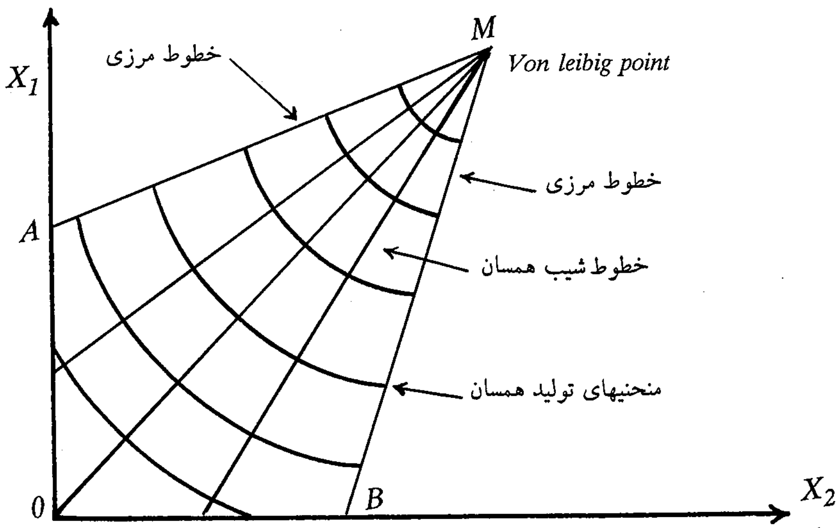
منحنی‌های تولید همسان برای یک تابع تولید با عبارت اثر متقابل مثبت، یعنی $a_{12}>0$ در شکل (۴-۵) ، نشان داده شده‌اند.

نکات زیر را می‌توان از شکل (۴-۵) استنتاج نمود :

۱ـ منحنی‌های تولید همسان با محور نهاده مماس نیستند.

۲ـ بعضی از منحنی‌های تولید همسان محورهای نهاده را قطع می‌کنند و بنابراین مقدار ستاده مربوط به آنها را می‌توان تنها با کاربرد یکی از دو عامل، تولید کرد؛ بسته به این که مقدار a_0، a_1 و a_{11} چه باشد.

۳ـ منحنی تولید همسان مربوط به نقطه حداکثر تابع تولید، مشخص کننده حداکثر ستاده برای ترکیب واحد، نهاده‌های X_1 و X_2 است. این نقطه، بوسیله نقطه M بر روی نقشه منحنی تولید همسان نشان داده شده است. این نقطه به نقطه «فون لیبیگ»[1] معروف است.



شکل (۴-۵) : منحنیهای تولید همسان، خطوط شیب همسان، خطوط مرزی و «نقطه فون لیبیگ» برای تابع تولید درجه دوم

1 . Von leibig point

نرخ جانشینی فنی (RTS)

نرخ جانشینی فنی نهاده X_2 برای نهاده X_1 را بوسیله مشتق مرتبه اول x_1 نسبت به x_2 از رابطه (۴-۱۶) و سپس باگذاردن علامت منفی قبل از آن می‌توان بدست آورد، بدین ترتیب :

$$RTS_{21} = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_2 + 2a_{22}x_2 + a_{12}x_1}{a_1 + 2a_{11}x_1 + a_{12}x_2} \qquad (۴\text{-}۱۷)$$

بنابراین، RTS_{21}، تابعی از x_1 و x_2 و همچنین سطح هر دو نهاده می‌باشد.

معادله خطوط شیب همسان

به منظور دستیابی به معادله خطوط شیب همسان برای دو نهاده تابع تولید درجه دوم رابطه (۴-۱۱) ، رابطه (۴-۱۷) را مساوی مقدار ثابت c قرار داده و آن را برای x_1 بر حسب x_2 حل می‌کنیم، که داریم :

$$x_1 = \frac{a_1c - a_2}{-2a_{11}c + a_{12}} + \frac{(ca_{12} - 2a_{22})x_2}{-2a_{11}c + a_{12}} \qquad (۴\text{-}۱۸)$$

رابطه (۴-۱۸) یک معادله خطی است. بعلاوه خطوط شیب همسان از مرکز مختصات نمی‌توانند عبور کنند، به استثناء این موارد :

$$\frac{a_1c - a_2}{-2a_{11}c + a_{12}} = 0 \quad \text{یا} \quad c = \frac{a_2}{a_1} \qquad (۴\text{-}۱۹)$$

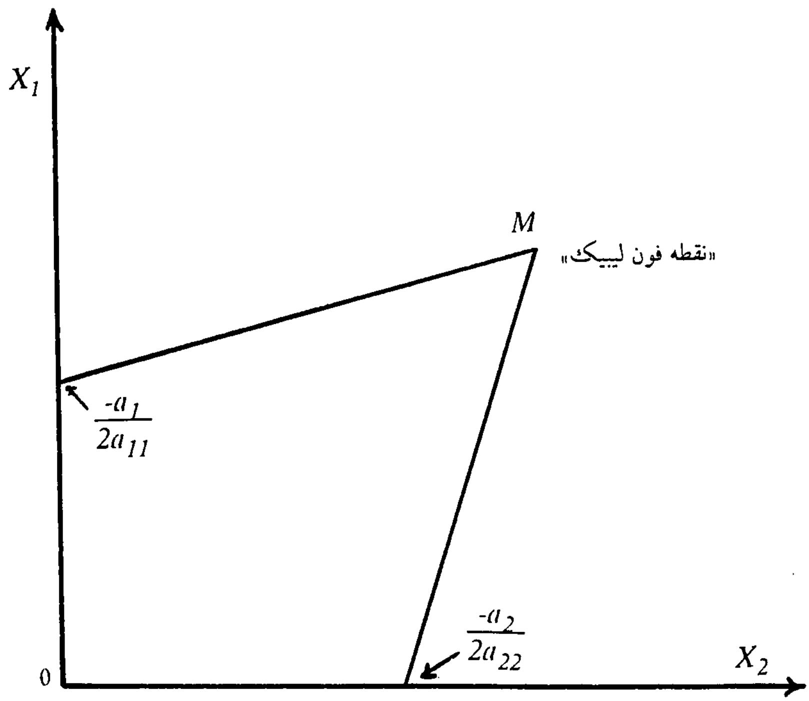
بدین ترتیب، تنها آن خط شیب همسان از مرکز مختصات عبور می‌کند، که خط مقیاس باشد؛ چون آن یک خط مستقیم است.

خطوط مرزی

خط مرزی مربوط به معادله خطوط شیب همسان رابطه (۴-۱۸) را بوسیله جانشین نمودن $c = 0$ در رابطه مذکور می‌توان پیدا کرد، یعنی :

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_{12}} - \frac{2a_{22}}{a_{12}}x_2 \qquad (۴\text{-}۲۰)$$

این خط مرزی محور x_2 را وقتیکه $a_{22}<0$ است در $x_2 = \frac{-a_2}{2a_{22}}$ قطع می‌کند و این موضوع دلالت بر مثبت بودن سطح نهاده x_2 دارد. بطور مشابه دیگر خط مرزی مربوط به $RTS_{12}=0$ محور x_1 را در $x_1 = \frac{-a_1}{2a_{11}}$، قطع می‌کند. این دو خط مرزی وقتی $a_{12}>0$ است معمولاً دارای شیب مثبت می‌باشند و در نقطه «فون ـ لیبیگ» با همدیگر تلاقی پیدا می‌کنند. هرگاه عبارت اثر متقابل در رابطه (۴-۱۱) صفر است، یعنی $a_{12} = 0$ خط مرزی بصورت قائم‌الزاویه به نقطه فون ـ لیبیگ متصل می‌شود. خواننده باید تلاش نماید علت این پدیده را دریابد. دو خط مرزی ممکن، برای تولید تابع درجه دوم در شکل (۴-۶) نشان داده شده است. خواننده عقیده خود را درباره رفتار خطوط مرزی وقتی $a_{12}<0$ است می‌تواند ابراز نماید.



شکل (۴-۶) : خطوط مرزی مربوط به دو نهاده تابع تولید درجه دوم

۴-۳- تابع تولید ریشه دوم[1]

این تابع تلفیقی بین تابع کاب ـ داگلاس و تابع درجه دوم است. تابع ریشه دوم از محدودیتهای مانند ترکیب ثابت نهاده برای تولید سطوح مختلف ستاده در تابع تولید کاب ـ داگلاس و خطوط شیب همسان خطی، در تابع درجه دوم مبراست. این تابع در تولید کل از تابع درجه دوم و در تولید نهائی نزولی با نرخ کاهنده از تابع کاب ـ داگلاس پیروی می‌کند.

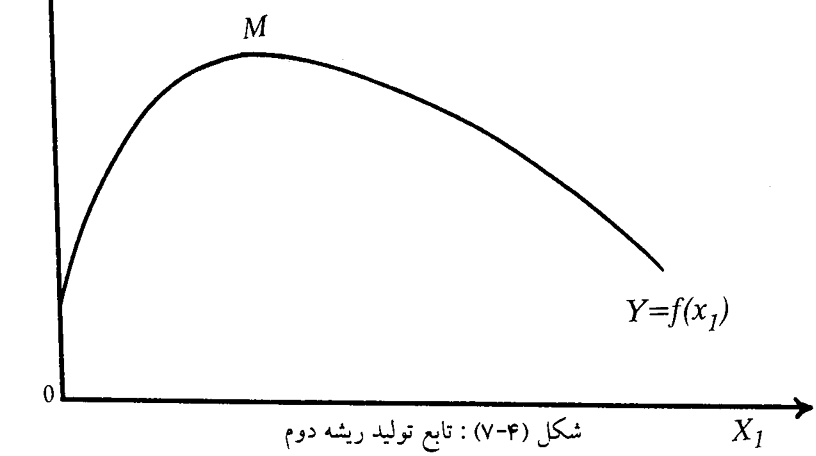
شکل عمومی تابع ریشه دوم در شکل (۴-۷) نشان داده شده است. در این شکل ملاحظه می‌گردد که منحنی تولید کل $y = f(x_1)$، بعد از نقطه M، بطور نزولی ادامه می‌یابد. در این تابع برخلاف تابع درجه دوم اثر قرینگی[2] در منحنی تولید کل وجود ندارد.

اشکال جبری تابع تولید ریشه دوم با یک، دو و n نهاده متغیر به ترتیب عبارتند از :

$$y = a_0 + a_1 x_1^{.5} + a_{11} x_1 \qquad (۴-۲۱)$$

$$y = a_0 + a_1 x_1^{.5} + a_2 x_2^{.5} + a_{11} x_1 + a_{22} x_2 + a_{12} x_1^{.5} x_2^{.5} \qquad (۴-۲۲)$$

$$y = a_0 + \sum_i a_i x_i^{.5} + \sum_i a_{ii} x_i + \sum_i \sum_j a_{ij} x_i^{.5} x_j^{.5}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n \ (i < j) \qquad (۴-۲۳)$$



شکل (۴-۷) : تابع تولید ریشه دوم

1 . Square - Root Production Function

2 . Mirror Effect

تولید متوسط (AP)

از قسمت واکنش تابع تولید رابطه (۴-۲۱) ، تولید متوسط نسبت به نهاده X_1، یعنی AP_1را می توان پیدا نمود.

$$AP_1 = \frac{a_1 x_1^{.5} + a_{11} x_1}{x_1} = a_{11} + a_1 x_1^{-.5} \qquad (۴-۲۴)$$

خواننده، این معادله را برای تمرین شکل و ماهیت آن می‌تواند در یک نمودار رسم کند. شاید توجه داشتید که تحت شرایط طبیعی، انتظار می‌رود که a_{11} کوچکتر از صفر و $a_1>0$ باشد.

تولید نهائی MP

از رابطه (۴-۲۱) ، تولید نهایی نسبت به نهاده X_1عبارتست از :

$$MP_1 = \frac{dy}{dx_1} = a_{11} + .5a_1 x_1^{-.5} \qquad (۴-۲۵)$$

مجدداً متذکر می‌شویم که برای داشتن یک تابع تولید خوش‌رفتار باید $a_{11}<0$ و $a_{1>0}$ باشد. بدین ترتیب، ممکن است MP_1 در سطوح زیر X_1، بسیار بزرگ بوده و با نرخ نزولی چنانکه سطح نهاده افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد. برای منفی شدن تولید نهایی مقادیر نهاده به اندازه کافی بزرگ می‌باشند. چنانکه ستاده کل بعد از نقطه (M) شروع به کاهش می‌نماید.

حداکثر ستاده کل مربوط به این نقطه (M) بر روی منحنی تولیدکل در جائی است که تولید نهائی صفر است، بنابراین :

$$MP_1 = .5a_1 x_1^{-.5} + a_{11} = 0$$

یا

$$x_1 = .25a_1^2 a_{11}^{-2} \qquad (۴-۲۶)$$

x_1، سطح نهاده مورد استفاده است در جائیکه محصول در حداکثر سطح ستاده می‌باشد.

منحنی‌های تولید همسان

معادله منحنی تولید همسان مربوط به تابع تولید (۴-۲۲) داده شده است بوسیله :

$$x_1 = \left[\frac{-(a_1 + a_{12}x_2^{.5}) \pm \sqrt{\{a_1 + a_{12}x_2^{.5})^2 + 4a_{11}(y^0 - a_0 - a_2x_2^{.5} - a_{22}x_2)\}}}{2a_{11}}\right]^2 \quad (۴-۲۷)$$

نقشه منحنی تولید همسان را می‌توان از رابطه (۴-۲۷) استخراج نمود. منحنی‌های نزدیک به مرکز مختصات محورهای نهاده را در فضای نهاده‌ای بطوری که در شکل (۴-۸) نشان داده شده است قطع می‌کنند.

نرخ جانشینی فنی RTS

نرخ جانشینی فنی بوسیله مشتق مرتبه اول x_1از رابطه (۴-۲۷) بدست می‌آید، بطوری که :

$$RTS_{21} = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_{22} + .5a_2x_2^{-.5} + .5a_{12}x_1^{.5}x_2^{-.5}}{a_{11} + .5a_1x_1^{-.5} + .5a_{12}x_1^{-.5}x_2^{.5}} \qquad (۴-۲۸)$$

خطوط شیب همسان

معادله خط شیب همسان را برای این نوع از تابع تولید می‌توان بوسیله مساوی قراردادن RTS_{21} در رابطه (۴-۲۸) با مقدار ثابت c استخراج نمود. بدین ترتیب

$$x_1 = \left[\frac{ca_{11} - a_{22} - .5a_2x_2^{-.5} \pm \sqrt{\{(a_{22} - ca_{11} + .5a_2x_2^{-.5})^2 - 2a_{12}x_2^{-.5}(.5ca_1 + .5ca_{12}x_2^{.5})\}}}{a_{12}x_2^{-.5}}\right]^2 (۴-۲۹)$$

بنابراین خطوط شیب همسان داده شده بوسیله رابطه (۴-۲۹) برای این نوع تابع تولید از مرکز مختصات عبور می‌کند. خطوط شیب همسان غیرخطی بوده و در یک نقطه مشخص در سطح نهادهٔ برابر به همدیگر متصل می‌گردند. همانند سطح حداکثر ستاده چنانکه در تابع تولید درجه دوم وجود داشت. این موضوع در شکل (۴-۸) نشان داده شده است. توجه داشته باشید که این شکل برای نوع مثبت اثر متقابل بین دو نهاده X_1و X_2 یعنی با $a_{12}>0$ در رابطه (۴-۲۲) مدنظر است. خطوط مسیر توسعه نیز همین گونه، خمیده‌اند و نشانگر تغییر نسبت

توسعه، معادلات خط مرزی[1] و کشش جانشینی می‌باشند. این مقادیر قبلاً در فصل ۲ به تفصیل بررسی شدند. این مقادیر، برای فهم اقتصادی اطلاعات داده ـ ستاده‌ای و شکل ریاضی برازش شده توابع تولید، اهمیت اساسی دارند. اعتبار استنتاجها و نتایجی که با استفاده از یک مدل اقتصادی درباره محیط اقتصادی مورد بررسی گرفته می‌شوند، بستگی به این مقادیر دارد. بنابراین، این مقادیر بعنوان ابزارهایی برای دست‌یابی به اهداف موردنظر، عمل می‌کنند.

تمرین:

۳-۱ نکات مهمی که هنگام تصریح یک مدل اقتصادی باید در نظر داشت، کدامند، به طور خلاصه توضیح دهید.

۳-۲ درباره دستورالعمل‌های کلی که پژوهشگر را در انتخاب شکل مناسبی از تابع تولید یاری می‌دهند، بحث کنید. در عمل، تا چه حد به «سادگی محاسباتی» دستیابی پیدا شده است؟

۳-۳ دشواریهای اندازه گیری و دسته‌بندی مربوط نهاده‌های زمین، کار، سرمایه و مدیریت کدامند؟ چگونه می‌توان بر این دشواریها چیره گشت؟

۳-۴ روشهای گوناگون گردآوری داده‌های مناسب برای مطالعات تابع تولید، کدامند؟ کدام را ترجیح می‌دهید و چه موقع؟

۳-۵ «دقت در جمع آوری داده‌ها، بسیار مهم‌تر از شکل مدل اقتصادی است». درباره این جمله بحث کنید.

۳-۶ دشواریهای مهم تخمین تک‌معادله‌ای کدامند؟ کدام یک از آنها در مطالعات مربوط به تابع تولید بیشتر عمومیت دارد؟

۳-۷ هم‌خطی مرکب چیست؟ چگونه می‌توانید وجود و شدت آن را آزمون کنید؟ درباره روشهای مناسب حل این مشکل، بحث کنید.

---

1 . *Ridge line equations*

منابع برای مطالعه بیشتر

Griliches, Zvi, "Specification Bias in Estimates of Production Functions", *Journal of Farm Economics*, **39**(1), 1957, pp 8–20.

Heady, E.O. and J.L. Dillon, *Agricultural Production Functions*, Iowa State University Press, Ames, Iowa, 1961, Chs. 5 and 6.

Koutsoyiannis, A., *Theory of Econometrics*, 2nd ed., MacMillan, London, 1977, Ch. 2.

Perrin, R.K., "The Value of Information and the Value of Theoretical Models in Crop Response Research", *American Journal of Agricultural Economics*, **58**(1), 1976, pp 54–61.

Rao, V.M., "A Note on the Practice of Standardization of Land in Farm Production Function Studies", *Indian Journal of Agricultural Economics*, **31**(**2**), 1976, pp 63–65.

فصل چهارم

اشکال مختلف توابع تولید

اشکال مختلف توابع تولید، خصوصاً در ارتباط با شکلهای ریاضی و نموداری آنها در این فصل بطور مفصل مورد بحث قرار می‌گیرند. چگونگی استخراج تولید متوسط، تولید نهائی، کشش تولید، منحنی‌های تولید همسان، نرخ جانشینی فنی، خطوط هم‌شیب، خطوط مرزی و کشش جانشینی برای هر تابع در این فصل توضیح داده شده است.

۴-۱ تابع تولید خطی[1]

همانطوریکه درباره تابع چندجمله‌ای درجه یک اطلاع دارید، تابع تولید خطی ساده‌ترین شکل تمامی توابع تولید مورد استفاده در کشاورزی است. اشکال ریاضی این تابع یک، دو و n نهاده متغیر به ترتیب عبارتند از :

$$y = a_0 + a_1x_1 \tag{۴-۱}$$

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \tag{۴-۲}$$

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_ix_i \tag{۴-۳}$$

نمودار رابطه (۴-۱) در شکل (۴-۱) نشان داده شده است، که a_0 عرض از مبدأ و a_1

1 . Linear production function

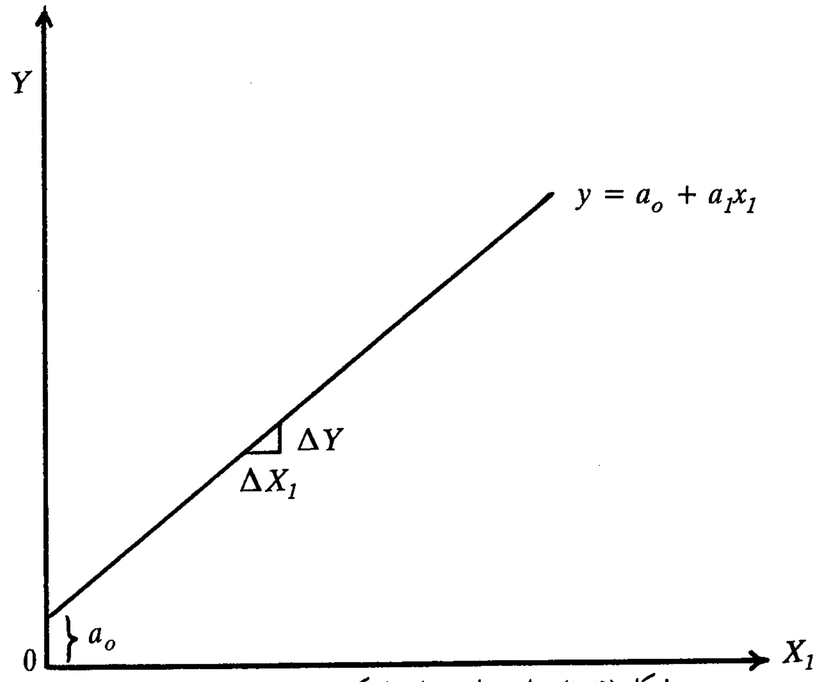
شیب تابع تولید است. با وجود اینکه تابع تولید خطی، یک تابع ساده است ولی این تابع در تحقیقات کشاورزی مورد استفاده قرار نمی‌گیرد. شاید تنها موردی که این شکل تابع تولید بصورت گسترده در بررسیهای اقتصادی مورد استفاده قرار گرفته است، در مطالعه تحقیقات کشاورزی مدیریت مزرعه[1] در هند، طی ۲۵ سال می‌باشد. علت اصلی در محدودیت کاربرد این تابع برای تجزیه و تحلیل اقتصادی، مسأله نقض ویژگیهای فروض اصلی تجزیه و تحلیل تابع است. برای مثال، نه مشتق مرتبه دوم این تابع کوچکتر از صفر است، یعنی $\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}$ و نه بازده‌های ناشی از مقیاس آن نزولی است، یعنی :

$$\Sigma \{ (\frac{x_i}{y})(\frac{\partial y}{\partial x_i}) \} < 1$$

در این تابع این موارد بدین صورت می‌باشند :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} = 0 \quad \text{و} \quad \Sigma \{ (\frac{x_i}{y})(\frac{\partial y}{\partial x_i}) \} = 1$$

در این تابع بازده نسبت به مقیاس ثابت بیان شده است. در هر صورت بعضی از نتایج مهم تابع تولید خطی را در اینجا بطور خلاصه مورد بحث قرار می‌دهیم.



شکل (۴-۱) : تابع تولید خطی با یک نهاده متغیر

1 . Farm Management

تولید متوسط[1] (AP)

از رابطه (۴-۱)، AP_1، تولید متوسط نهاده X_1را می توان بدست آورد، بطوری که:

$$AP_1 = \frac{a_1 x_1}{x_1} = a_1 \qquad (۴\text{-}۴)$$

بدین ترتیب AP_1بدون توجه به سطح نهاده مورد استفاده یک مقدار ثابت است.

تولید نهائی[2] (MP)

تولید نهائی نسبت به نهاده X_1از تابع تولید (۴-۱) عبارتست از:

$$MP_1 = \frac{dy}{dx_1} = a_1 \qquad (۵\text{-}۴)$$

بنابراین همانند AP_1، MP_1نیز بدون توجه به سطح نهاده X_1یک مقدار ثابت است.

از روابط (۴-۴)، (۴-۵) به وضوح مشخص است که برای یک تابع تولید خطی، برای تمامی سطوح نهاده مورد استفاده، $AP_1=MP_1$است. این خاصیت براحتی می‌تواند به $AP_i=MP_i$، $i = 1, 2, \dots, n$،تعمیم داده شود.

منحنی تولید همسان

چنانچه می‌دانیم، برای رسم نمودار منحنی تولید همسان، دو نهاده لازم است. از این رو تابع تولید داده شده بوسیله رابطه (۴-۲) با دو نهاده متغیر مورد بحث خواهد بود. معادله منحنی تولید همسان مربوط به تابع تولید رابطه (۴-۲) با سطح ثابت ستاده y عبارتست از:

$$x_1 = \frac{y^0 - a_0}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} x_2 \qquad (۶\text{-}۴)$$

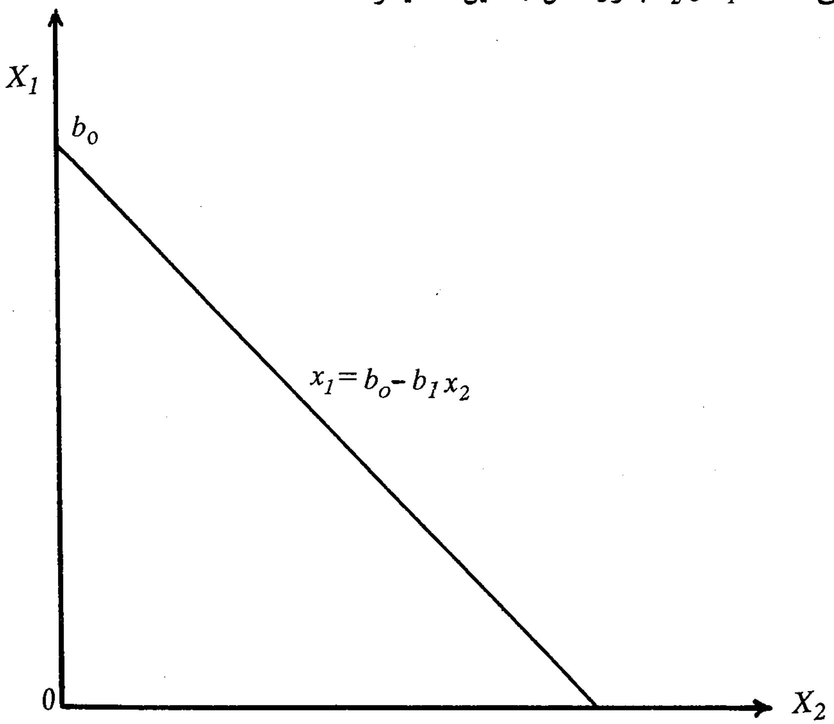
حال اجازه بدهید به جای $\frac{a_2}{a_1}$و $\frac{Y^0 - a_0}{a_1}$به ترتیب b_1و b_0قرار بدهیم. بدین ترتیب رابطه (۴-۶) را می توان این گونه نوشت:

---

1 . *Average product*　　2 . *Marginal product*

$$x_1 = b_0 - b_1 x_2 \tag{۴-۷}$$

نمایش نموداری این چنین معادله‌ای برای منحنی تولید همسان در شکل (۴-۲) ارائه شده است، که منحنی تولید همسان مربوط به تابع تولید خطی و دارای شیب نزولی است. این نشان می‌دهد که X_1 و X_2 بطور کامل جانشین همدیگرند.



شکل (۴-۲) : منحنی تولید همسان خطی مربوط به تابع تولید خطی

اما تجربه عمومی، نشان می‌دهد که یک چنین رابطه جانشینی بین نهاده‌ها کاملاً کمیاب است. هرگاه یک چنین رابطه‌ای پیدا شود، همواره باید دو نهاده‌ای را که چنین رابطه‌ای دارند، با هم جمع کنیم و با آن بعنوان یک نهاده یگانه، رفتار کنیم.

نرخ جانشینی فنی (RTS_{21})

از رابطه (۴-۶) ، می‌توان RTS_{21} را بدست آورد، بطوری که :

$$RTS_{21} = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_2}{a_1} \tag{۴-۸}$$

بدین ترتیب، RTS_{21} نرخ جانشینی فنی نهاده x_2 برای x_1 می‌باشد که مساوی با مقدار ثابت است، یعنی $\frac{a_2}{a_1}$. بنابراین هرگاه یک تابع تولید خطی مورد استفاده قرار گیرد، دو نهاده با یک نرخ ثابت جانشین همدیگر می‌شوند.

خطوط شیب همسان

وقتی معادله خط شیب همسان عبارتست از :

$$-\frac{dx_1}{dx_2} = c$$

که c مقدار ثابت، مثبت و واقعی است. این مورد را چون خطوط شیب همسان تعریف نشده‌اند، نمی‌توان حل نمود.

خطوط مرزی

در آنجایی که خطوط مرزی شیب همسان تعریف نشده‌اند، خطوط مرزی نیز برای این تابع تولید (خطی) بدون تعریف می‌باشند.

کشش تولید (Ep)

کشش تولید EP_i نسبت به هر نهاده X_i برابر با واحد است، یعنی :

$$E_{p_i} = \frac{MP_i}{AP_i} = \frac{a_i}{a_i} = 1 \qquad (۹-۴)$$

این موضوع دلالت بر این دارد که یک درصد افزایش در سطح نهاده X_i دقیقاً موجب یک درصد افزایش در سطح ستاده Y می‌گردد. بعبارت دیگر، دو برابر نمودن نهاده، موجب دوبرابر گردیدن ستاده می‌شود. وقتی تمامی نهاده‌های دیگر در سطح معینی که باید باشند، ثابت بمانند.

کشش جانشینی (Es)

از تابع تولید خطی رابطه (۴-۳)، کشش جانشینی بین نهاده‌های j و i بدست می‌آید، بطوری که می‌توان نوشت :

$$ES_{ji} = \frac{\%\, \Delta(x_i/x_j)}{\%\, \Delta(-dx_i/dx_j)}$$

اما برای یک تابع تولید خطی، $\frac{dx_i}{dx_j}$ بطور کلی ثابت است. بدین ترتیب در منحنی تولید

همسان داده شده، $(-\frac{dx_i}{dx_j}) = 0$ است. لذا، $Es_{ji} = \infty$ است. بدین معنی که تغییرات جزئی معینی در $\frac{Px_j}{Px_i}$ موجب تغییرات ناپیوسته در $\frac{x_i}{x_j}$ می‌شود، مثلاً از یک نقطه مرزی به نقطه مرزی دیگر.

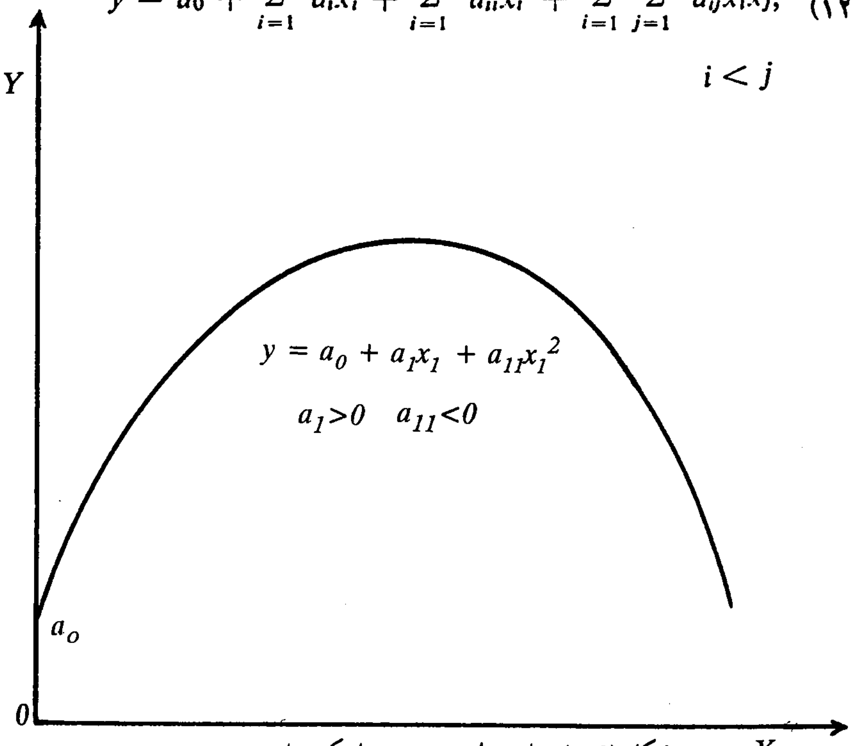
۲-۴ تابع تولید درجه دوم[1]

یک چند جمله‌ای درجه دوم، با اشکال جبری یک، دو و n نهاده متغیر به ترتیب عبارتند از :

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_{11}x_1^2 \quad (۱۰-۴)$$

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{12}x_1x_2 \quad (۱۱-۴)$$

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_ix_i + \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \quad i < j \quad (۱۲-۴)$$



شکل (۴-۳) : تابع تولید درجه دو با یک نهاده متغیر

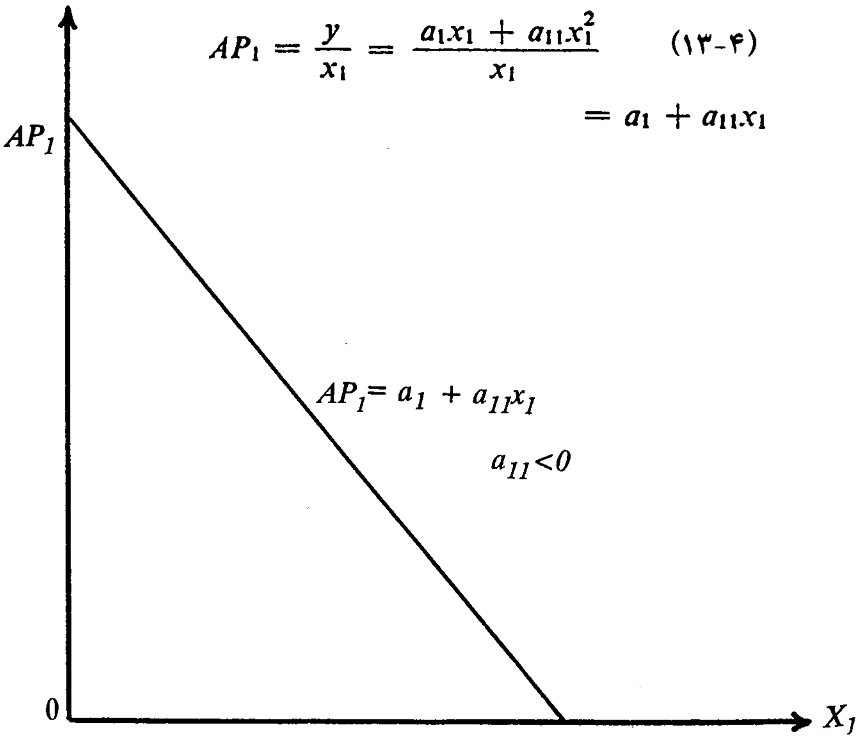
1 . *Quadratic production function*

در یک تابع درجه دوم خوش‌رفتار[1]، مانند (۴-۱۰) که نسبت به محور نهاده، مقعر است و دارای منحنی‌های تولید همسان محدب و منحنی‌های تبدیل محصول[2] مقعر، نسبت به مبدأ مختصات است، $a_{11}<0$ می‌باشد. یکی از چندین شکل ممکن نموداری چنین تابعی، در شکل (۴-۳) نشان داده شده است. منحنی محصول کل، به شکل یک منحنی قرینه[3] است، که حداکثر ستاده y در نقطه $x_1 = \frac{-a_1}{2a_{11}}$ بدست می‌آید. اینگونه توابع را محققانی که به بررسی اثر مقدار کود بر محصولات کشاورزی می‌پردازند، بطور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌دهند.

تولید متوسط (AP)

بطور مختصر با توجه به بخش واکنش تابع تولید، تولید متوسط نسبت به نهاده X_1 یعنی، AP_1 را می‌توان از رابطه (۴-۱۰) بدست آورد، بطوری که :

$$AP_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{a_1x_1 + a_{11}x_1^2}{x_1} = a_1 + a_{11}x_1 \qquad (۱۳\text{-}۴)$$



شکل (۴-۴) : تولید متوسط نهاده X_1، استخراج شده از تابع تولید درجه دوم

1 . Well - behaved quadratic production function

2 . Product Transformation curves

3 . Mirror curve

بصورت نموداری، AP_1 مربوط به تابع تولید درجه دوم با $a_{11}<0$ در شکل (۴-۴)، نشان داده شده که یک منحنی خطی نزولی یکنواخت است. این تابع را بطور مثبت یا منفی هم نیز می‌توان درنظر گرفت. AP_1 محورهای x_1 و y را در جائیکه $x_1 = 0$ و $x_1 = \frac{-a_1}{a_{11}}$ است قطع می‌کند، بخاطر داشته باشید که تحت شرایط معمولی $a_1>0$ و $a_{11}<0$ است، بنابراین سطح نهاده X_1 در جائیکه AP_1 محور x_1 را قطع می‌کند، مثبت است.

تولید نهائی (MP)

تولیدنهائی نسبت به نهاده X_1، یعنی MP_1 را می‌توان از رابطهٔ (۴-۱۰) بدست آورد، بطوری که:

$$MP_1 = \frac{dy}{dx_1} = a_1 + 2a_{11}x_1 \qquad (۴-۱۴)$$

در حالت معمولی، وقتی که $a_{11}<0$ است، MP_1 نیز همانند AP_1 یک منحنی خطی نزولی یکنواخت است، اما نرخ کاهش آن، دو برابر می‌باشد. MP_1 می‌تواند هم نزولی و هم منفی باشد، ولی نمی‌تواند هم افزایشی و هم کاهشی باشد. در سطح $x_1 = -\frac{a_1}{2a_{11}}$ که ستاده کل، حداکثر است، MP_1 صفر می‌باشد. این مقدار، نیمی از آن مقدار نهاده X_1 است، که در آن، تولید متوسط صفر می‌شود.

کشش تولید (E_p)

کشش تولید نسبت به نهاده X_1 یعنی Ep را می‌توان بدست آورد، بطوری که

$$E_{p_1} = \frac{MP_1}{AP_1} = \frac{a_1 + 2a_{11}x_1}{a_1 + a_{11}x_1} \qquad (۴-۱۵)$$

بدین ترتیب، Ep_1 تابعی از x_1، سطح نهاده X_1 است. وقتی $a_{11}<0$ است، کشش تولید با افزایش x_1 کاهش می‌یابد.

منحنی تولید همسان

معادله منحنی تولید همسان را می‌توان از تابع درجه دوم (۴-۱۱) داده شده با دو

نهاده متغیر، استخراج نمود.

$$x_1 = \frac{-(a_1 + a_{12}x_2) \pm [(a_1 + a_{12}x_2)^2 - 4a_{11}(a_0 + a_2x_2 + a_{22}x_2^2 - y^0)]^{.5}}{2a_{11}}$$

(۱۶-۴)

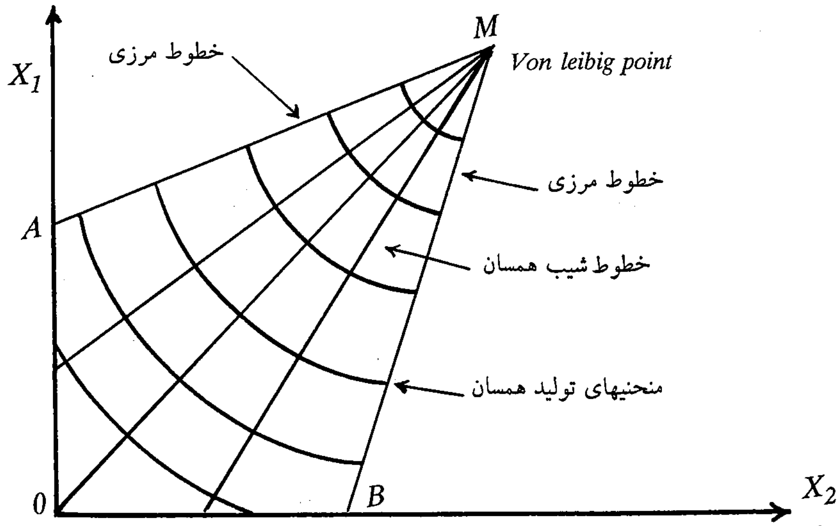
منحنی‌های تولید همسان برای یک تابع تولید با عبارت اثر متقابل مثبت، یعنی $a_{12}>0$ در شکل (۴-۵) ، نشان داده شده‌اند.

نکات زیر را می‌توان از شکل (۴-۵) استنتاج نمود :

۱ـ منحنی‌های تولید همسان با محور نهاده مماس نیستند.

۲ـ بعضی از منحنی‌های تولید همسان محورهای نهاده را قطع می‌کنند و بنابراین مقدار ستاده مربوط به آنها را می‌توان تنها باکاربرد یکی از دو عامل، تولید کرد؛ بسته به این که مقدار a_0، a_1 و a_{11} چه باشد.

۳ـ منحنی تولید همسان مربوط به نقطه حداکثر تابع تولید، مشخص کننده حداکثر ستاده برای ترکیب واحد، نهاده‌های X_1 و X_2 است. این نقطه، بوسیله نقطه M بر روی نقشه منحنی تولید همسان نشان داده شده است. این نقطه به نقطه «فون لیبیگ»[1] معروف است.



شکل (۴-۵) : منحنیهای تولید همسان، خطوط شیب همسان، خطوط مرزی و «نقطه فون لیبیگ» برای تابع تولید درجه دوم

1 . Von leibig point

نرخ جانشینی فنی (RTS)

نرخ جانشینی فنی نهاده X_2 برای نهاده X_1 را بوسیله مشتق مرتبه اول x_1 نسبت به x_2 از رابطه (۴-۱۶) و سپس باگذاردن علامت منفی قبل از آن می‌توان بدست آورد، بدین ترتیب :

$$RTS_{21} = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_2 + 2a_{22}x_2 + a_{12}x_1}{a_1 + 2a_{11}x_1 + a_{12}x_2} \qquad (۴-۱۷)$$

بنابراین، RTS_{21}، تابعی از x_1 و x_2 و همچنین سطح هر دو نهاده می‌باشد.

معادله خطوط شیب همسان

به منظور دستیابی به معادله خطوط شیب همسان برای دو نهاده تابع تولید درجه دوم رابطه (۴-۱۱) ، رابطه (۴-۱۷) را مساوی مقدار ثابت c قرار داده و آن را برای x_1 بر حسب x_2 حل می‌کنیم، که داریم :

$$x_1 = \frac{a_1c - a_2}{-2a_{11}c + a_{12}} + \frac{(ca_{12} - 2a_{22})x_2}{-2a_{11}c + a_{12}} \qquad (۴-۱۸)$$

رابطه (۴-۱۸) یک معادله خطی است. بعلاوه خطوط شیب همسان از مرکز مختصات نمی‌توانند عبور کنند، به استثناء این موارد :

$$\frac{a_1c - a_2}{-2a_{11}c + a_{12}} = 0 \quad \text{یا} \quad c = \frac{a_2}{a_1} \qquad (۴-۱۹)$$

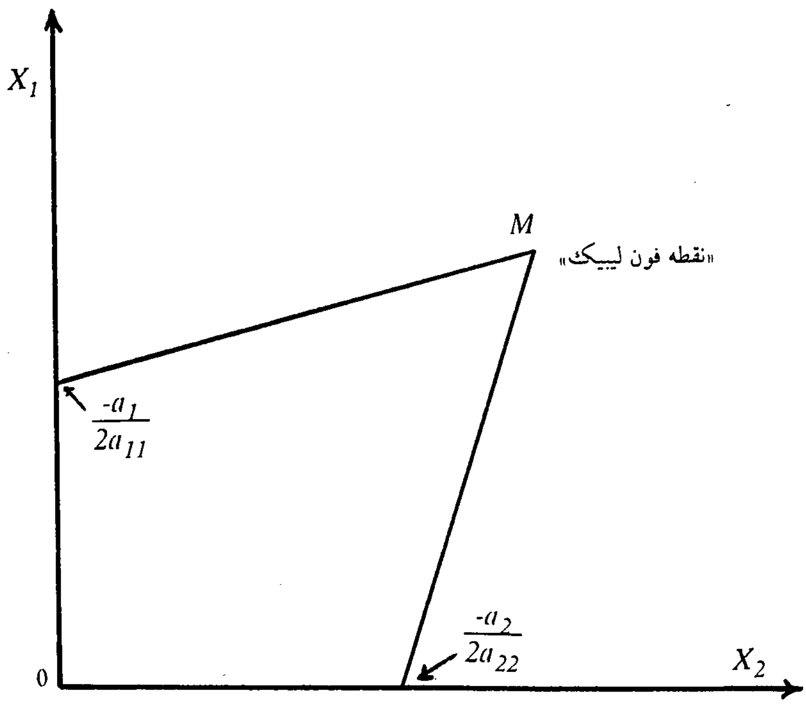
بدین ترتیب، تنها آن خط شیب همسان از مرکز مختصات عبور می‌کند، که خط مقیاس باشد؛ چون آن یک خط مستقیم است.

خطوط مرزی

خط مرزی مربوط به معادله خطوط شیب همسان رابطه (۴-۱۸) را بوسیله جانشین نمودن $c = 0$ در رابطه مذکور می‌توان پیداکرد، یعنی :

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_{12}} - \frac{2a_{22}}{a_{12}}x_2 \qquad (۴-۲۰)$$

این خط مرزی محور x_2را وقتیکه $a_{22}<0$ است در $x_2 = \frac{-a_2}{2a_{22}}$قطع می‌کند و این موضوع دلالت بر مثبت بودن سطح نهاده x_2دارد. بطور مشابه دیگر خط مرزی مربوط به $RTS_{12}=0$محور x_1را در $x_1 = \frac{-a_1}{2a_{11}}$، قطع می‌کند. این دو خط مرزی وقتی $a_{12}>0$ است معمولاً دارای شیب مثبت می‌باشند و در نقطه «فون ـ لیبیگ» با همدیگر تلاقی پیدا می‌کنند. هرگاه عبارت اثر متقابل در رابطه (۴-۱۱) صفر است، یعنی $a_{12} = 0$ خط مرزی بصورت قائم‌الزاویه به نقطه فون ـ لیبیگ متصل می‌شود. خواننده باید تلاش نماید علت این پدیده را دریابد. دو خط مرزی ممکن، برای تولید تابع درجه دوم در شکل (۴-۶) نشان داده شده است. خواننده عقیده خود را درباره رفتار خطوط مرزی وقتی $a_{12}<0$ است می‌تواند ابراز نماید.



شکل (۴-۶) : خطوط مرزی مربوط به دو نهاده تابع تولید درجه دوم

۴-۳- تابع تولید ریشه دوم[1]

این تابع تلفیقی بین تابع کاب ـ داگلاس و تابع درجه دوم است. تابع ریشه دوم از محدودیتهای مانند ترکیب ثابت نهاده برای تولید سطوح مختلف ستاده در تابع تولید کاب ـ داگلاس و خطوط شیب همسان خطی، در تابع درجه دوم مبراست. این تابع در تولید کل از تابع درجه دوم و در تولید نهائی نزولی با نرخ کاهنده از تابع کاب ـ داگلاس پیروی می‌کند.

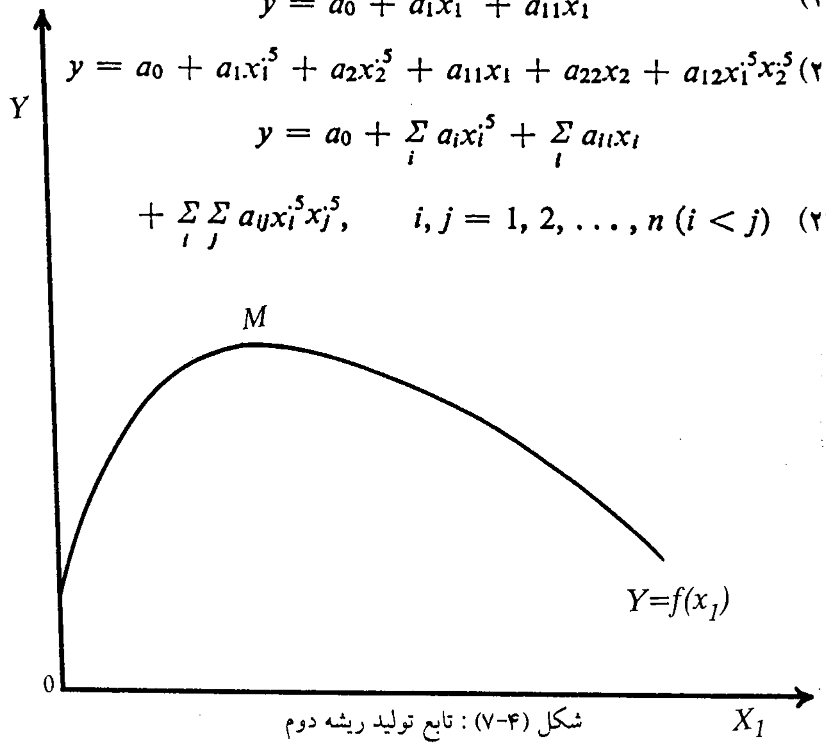
شکل عمومی تابع ریشه دوم در شکل (۴-۷) نشان داده شده است. در این شکل ملاحظه می‌گردد که منحنی تولید کل $y = f(x_1)$، بعد از نقطه M، بطور نزولی ادامه می‌یابد. در این تابع برخلاف تابع درجه دوم اثر قرینگی[2] در منحنی تولید کل وجود ندارد.

اشکال جبری تابع تولید ریشه دوم با یک، دو و n نهاده متغیر به ترتیب عبارتند از :

$$y = a_0 + a_1 x_1^{.5} + a_{11} x_1 \qquad (۲۱-۴)$$

$$y = a_0 + a_1 x_1^{.5} + a_2 x_2^{.5} + a_{11} x_1 + a_{22} x_2 + a_{12} x_1^{.5} x_2^{.5} \qquad (۲۲-۴)$$

$$y = a_0 + \sum_i a_i x_i^{.5} + \sum_i a_{ii} x_i + \sum_i \sum_j a_{ij} x_i^{.5} x_j^{.5}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n \ (i < j) \qquad (۲۳-۴)$$



شکل (۴-۷) : تابع تولید ریشه دوم

---

1 . *Square - Root Production Function* 2 . *Mirror Effect*

تولید متوسط (AP)

از قسمت واکنش تابع تولید رابطه (۴-۲۱) ، تولید متوسط نسبت به نهاده X_1، یعنی AP_1را می‌توان پیدا نمود.

$$AP_1 = \frac{a_1 x_1^{.5} + a_{11} x_1}{x_1} = a_{11} + a_1 x_1^{-.5} \qquad (۴-۲۴)$$

خواننده، این معادله را برای تمرین شکل و ماهیت آن می‌تواند در یک نمودار رسم کند. شاید توجه داشتید که تحت شرایط طبیعی، انتظار می‌رود که a_{11} کوچکتر از صفر و $a_1>0$ باشد.

تولید نهائی MP

از رابطه (۴-۲۱) ، تولید نهایی نسبت به نهاده X_1عبارتست از :

$$MP_1 = \frac{dy}{dx_1} = a_{11} + .5a_1 x_1^{-.5} \qquad (۴-۲۵)$$

مجدداً متذکر می‌شویم که برای داشتن یک تابع تولید خوش‌رفتار باید $a_{11}<0$ و $a_{1>0}$ باشد. بدین ترتیب، ممکن است MP_1 در سطوح زیر X_1، بسیار بزرگ بوده و با نرخ نزولی چنانکه سطح نهاده افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد. برای منفی شدن تولید نهایی مقادیر نهاده به اندازه کافی بزرگ می‌باشند. چنانکه ستاده کل بعد از نقطه (M) شروع به کاهش می‌نماید.

حداکثر ستاده کل مربوط به این نقطه (M) بر روی منحنی تولید کل در جائی است که تولید نهائی صفر است، بنابراین :

$$MP_1 = .5a_1 x_1^{-.5} + a_{11} = 0$$

یا

$$x_1 = .25a_1^2 a_{11}^{-2} \qquad (۴-۲۶)$$

x_1، سطح نهاده مورد استفاده است در جائیکه محصول در حداکثر سطح ستاده می‌باشد.

منحنی‌های تولید همسان

معادله منحنی تولید همسان مربوط به تابع تولید (۴-۲۲) داده شده است بوسیله :

$$x_1 = \left[\frac{-(a_1 + a_{12}x_2^{.5}) \pm \sqrt{\{(a_1 + a_{12}x_2^{.5})^2 + 4a_{11}(y^0 - a_0 - a_2x_2^{.5} - a_{22}x_2)\}}}{2a_{11}}\right]^2 \quad (۴-۲۷)$$

نقشه منحنی تولید همسان را می‌توان از رابطه (۴-۲۷) استخراج نمود. منحنی‌های نزدیک به مرکز مختصات محورهای نهاده را در فضای نهاده‌ای بطوری که در شکل (۴-۸) نشان داده شده است قطع می‌کنند.

نرخ جانشینی فنی RTS

نرخ جانشینی فنی بوسیله مشتق مرتبه اول x_1از رابطه (۴-۲۷) بدست می‌آید، بطوری که :

$$RTS_{21} = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_{22} + .5a_2x_2^{-.5} + .5a_{12}x_1^{.5}x_2^{-.5}}{a_{11} + .5a_1x_1^{-.5} + .5a_{12}x_1^{-.5}x_2^{.5}} \quad (۴-۲۸)$$

خطوط شیب همسان

معادله خط شیب همسان را برای این نوع از تابع تولید می‌توان بوسیله مساوی قراردادن RTS_{21} در رابطه (۴-۲۸) با مقدار ثابت c استخراج نمود. بدین ترتیب

$$x_1 = \left[\frac{ca_{11} - a_{22} - .5a_2x_2^{-.5} \pm \sqrt{\{(a_{22} - ca_{11} + .5a_2x_2^{-.5})^2 - 2a_{12}x_2^{-.5}(.5ca_1 + .5ca_{12}x_2^{.5})\}}}{a_{12}x_2^{-.5}}\right]^2 \quad (۴-۲۹)$$

بنابراین خطوط شیب همسان داده شده بوسیله رابطه (۴-۲۹) برای این نوع تابع تولید از مرکز مختصات عبور می‌کند. خطوط شیب همسان غیرخطی بوده و در یک نقطه مشخص در سطح نهادهٔ برابر به همدیگر متصل می‌گردند. همانند سطح حداکثر ستاده چنانکه در تابع تولید درجه دوم وجود داشت. این موضوع در شکل (۴-۸) نشان داده شده است. توجه داشته باشید که این شکل برای نوع مثبت اثر متقابل بین دو نهاده X_1و X_2 یعنی با $a_{12}>0$در رابطه (۴-۲۲) مدنظر است. خطوط مسیر توسعه نیز همین گونه، خمیده‌اند و نشانگر تغییر نسبت

نهاده‌ها در مسیر حداقل هزینه مربوط به مقادیر مختلف ستاده می‌باشند.

خطوط مرزی

معادلات خطوط مرزی مربوط به منحنی‌های تولید همسان داده شده بوسیله رابطه (۴-۲۷) را می‌توان بوسیله مساوی صفر قرار دادن رابطه (۴-۲۸) و حل آن برای x_2 بدست آورد، که عبارتست از :

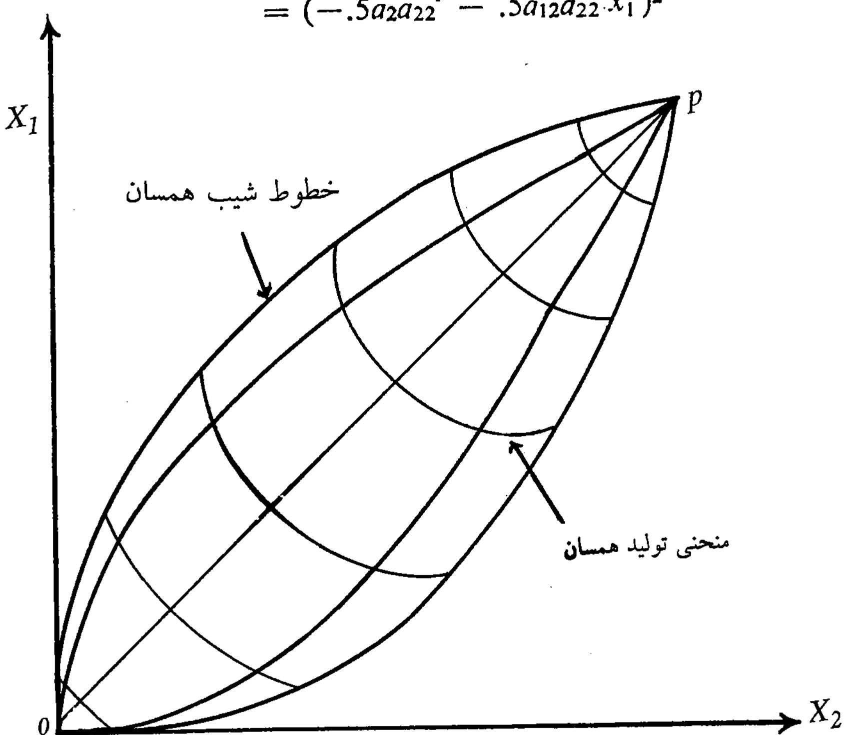
$$\frac{a_{22} + .5a_2 x_2^{-.5} + .5a_{12} x_1^{.5} x_2^{-.5}}{a_{11} + .5a_1 x_1^{-.5} + .5a_{12} x_1^{-.5} x_2^{.5}} = 0$$

یا

$$a_{22} + .5a_2 x_2^{-.5} + .5a_{12} x_1^{.5} x_2^{-.5} = 0$$

یا

$$x_2 = \left(\frac{.5a_2 + .5a_{12} x_1^{.5}}{-a_{22}}\right)^2$$
$$= (-.5a_2 a_{22}^{-1} - .5a_{12} a_{22}^{-1} x_1^{.5})^2$$



شکل (۴-۸) : منحنی تولید همسان و خطوط شیب همسان برای تابع تولید ریشه دوم

بنابراین معادله (۴-۳۰) معادله خط مرزی مربوط به $RTS_{21}=0$ است در جائیکه با $x_2 = 0.25a^2{}_2a^{-2}{}_{22}$، متقاطع است. با مساوی صفر قراردادن x_1 مقدار x_2 بدست آمده و به همین نحو خط مرزی مربوط به RTS_{12} برابر خواهد بود با $x_1=0.25a_1{}^2a_{11}{}^{-2}$.

کشش تولید *(Ep)*

معادله کشش تولید نسبت به X_1 را می‌توان از معادله تولید (۴-۲۱) بـدست آورد، بطوری که :

$$E_{p_1} = \frac{dy}{dx_1}\ \frac{x_1}{y} = (a_{11} + .5a_1x_1^{-.5})\,\frac{x_1}{y} \qquad (۴\text{-}۳۱)$$

بنابراین کشش تولید، آنطوریکه در تابع تولید کاب-داگلاس وجود دارد، یک مقدار ثابت نیست و تابعی است از x_1، سطح نهاده X_1، همانطوریکه در تابع تولید درجه دوم وجود داشت.

۴-۴-بعضی از دیگر اشکال توابع چندجمله‌ای

توابع درجه دوم و ریشه دوم بوسیله معادلات چندجمله‌ای با خصوصیات متفاوت بیان می‌گردند.

یک شکل مهم دیگر از توابع تولید چند جمله‌ای که با توجه به ماهیت خطوط شیب همسان، حالت میانی دو شکل تبعی پیشین است - تابعی است که در آن x_i بـه تـوان ۱/۵ می‌رسد. در زیر سه تابع تولید چندجمله‌ای از این نوع، به ترتیب با یک،دو و n متغیر ارائه شده است.

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_{11}x_1^{1.5} \qquad (۴\text{-}۳۲)$$

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{11}x_1^{1.5} + a_{22}x_2^{1.5} + a_{12}x_1^{1.5}x_2^{1.5} \qquad (۴\text{-}۳۳)$$

$$\begin{aligned} y &= a_0 + \sum_i a_ix_i + \sum_i a_{ii}x_i^{1.5} \\ &+ \sum_i \sum_j a_{ij}x_i^{1.5}x_j^{1.5} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n\ (i < j) \end{aligned} \qquad (۴\text{-}۳۴)$$

برای تشریح واکنش محصول به کود، اشکال دیگری از توابع هذلولی و غیرهذلولی پیشنهاد شده است، متأسفانه اکثر این معادلات برای استفاده در کـارهای تـجربی مشکـل

می‌باشند و به همین علت، در بین محققان از عمومیت چندانی برخوردار نمی‌باشند، یکی از معادلات هذلولی پیشنهاد شده عبارتست از:

$$y = \frac{a_0 x_1}{a_1 + x_1} + a_2 x_1 \tag{۳۵-۴}$$

استخراج MP_1 از رابطه (۴-۳۵)، همانند استخراج MP از تابع تولید ریشه دوم است، که عبارتست از:

$$\frac{dy}{dx_1} = \frac{a_0 a_1}{(a_1 + x_1)^2} + a_2 \tag{۳۶-۴}$$

توجه داشته باشید که a_2 در این معادله بطور کلی منفی می‌باشد، بنابراین بعد از آنکه تولید کل به حداکثر ارزش خود رسید MP_1 با نرخ نزولی، کاهش می‌یابد.

یکی از انواع دیگر معادله هذلولی (پیشنهاد شده بوسیله تیلاو[1]) عبارتست از:

$$y = [a_1 x_1 + a_{11} x_1^2]^{1/2} \tag{۳۷-۴}$$

MP_1 این تابع تولید غیرخطی می‌باشد.

$$MP_1 = \frac{dy}{dx_1} = \frac{a_1 + 2a_{11}x_1}{2(a_1 x_1 + a_{11} x_1^2)^{1/2}} \tag{۳۸-۴}$$

در رابطه (۴-۳۸)، اگر $x_1 = \frac{-a_1}{2a_{11}}$ باشد، آنگاه این رابطه مساوی صفر خواهد بود. از انواع دیگر توابع چندجمله‌ای که هم دارای بهره‌وری نهائی[2] نزولی و هم صعودی است، عبارتست از:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 \tag{۳۹-۴}$$

در این چندجمله‌ای اگر $a_3 < 0$ باشد، MP_1 این تابع، صعودی خواهد بود تا جائیکه $x_1 = \frac{-1}{3} a_2 a_3^{-1}$ است و سپس MP_1 نزولی و مثبت خواهد بود تا وقتیکه y در سطح حداکثر است. از قرار $x_1 = \frac{-1}{3} a_3^{-1} [a_2 \pm [a_2^2 - 3a_1 a_3)^{0.5}]$، MP_1 با نرخ فزاینده کاهش

---

1 . Thilau

2 . Marginal productivity

می‌یابد.

یکی از رایجترین شکلهای توبع چندجمله‌ای، تابع لُجستیک[1] ست.

$$y = \frac{a_0}{1 + a_1 e^{-a_2 x_1}} \qquad (۴۰-۴)$$

که در این تابع، a_0، a_1، a_2 مقادیر ثابت (پارامتر) و e پایه لگاریتم طبیعی است. رابطه (۴۰-۴) نیز یک منحنی مجانبی است که با افزایش a_o ، تولید بطور مجانبی به سوی a_o افزایش می‌یابد.

لذا این معادله اجازه نمی‌دهد منحنی تولید کل حالت نزولی بخود بگیرد، از رابطه (۴۰-۴) MP_1 را می‌توان بدست آورد.

$$MP_1 = \frac{dy}{dx_1} = a_0 a_1 a_2 e^{-a_2 x_1}(1 + a_1 e^{-a_2 x_1})^{-2} \qquad (۴۱-۴)$$

این تابع دارای کشش تولید متغیر و غیرمنفی است. با مساوی یک قراردادن Ep_1 داریم :

$$x_1 = a_1^{-1} a_2^{-1}(a_1 + e^{a_2 x_1}) \qquad (۴۲-۴)$$

---

1 . *Logistic function*

۱ـ در تابع لجستیک اگر $x = 0$ باشد ، $y = \frac{a}{1+b}$ خواهد شد، اگر x به طرف $+\infty$ میل کند، y نیز به طرف a_0 میل می‌کند. اگر x به طرف $-\infty$ میل کند، y بطرف صفر میل می‌کند. با جایگزین کردن مقادیر مختلف x می‌توان مقادیری برای y پیدا کرد. منحنی لجستیک در زیر نمایش داده شده است (م)

۴-۵- تابع تولید اسپیلمن ـ میتسچرلیچ[1]

ماهیت تابع واکنش[2] محصول ـ کود، اولین بار بوسیله‌میتسچرلیچ‌در سال ۱۹۰۹ کشف گردید. او شاید اولین دانشجوی کشاورزی بود که یک تابع تولید غیرخطی را برای رابطه بازده محصول ـ کود پیشنهاد نمود. میتسچرلیچ با کمک بایل[3] معادله زیر را برای توضیح واکنش کود پیشنهاد کرد.

(۴۳-۴)

$$\ln a_0 - \ln (a_0 - y) = cx$$

در این معادله، q_oمحصول کل می‌باشد وقتیکه سطح ماده غذایی (کود) xبدون کمبود باشد. یعنی، حداکثر محصول به اضافه xمقدار ماده غذائی قابل حصول است؛در این تابع c مقدار ثابت متناسب که توضیح دهنده نرخ نزولی بازده‌نهائی و yواکنش محصول است. این شکل از معادله واکنش در موارد زیر مورد انتقاد قرار گرفته است.

۱ـ اینکه فکر کنیم c یک مقدار ثابت بوده و هیچ رابطه‌ای با محصول ، آب و هوا یا عوامل محیطی ندارد، نامعقول است.

۲ـ معادله واکنش دربرگیرنده محصولات کل نزولی یا تولیدات نهائی منفی نیست. به منظور ایجاد تولید نهائی منفی در این معادله آقای میتسچرلیچ رابطه (۴-۴۳) را بصورت زیر اصلاح نمود، بطوری که :

(۴۴-۴)

$$y = (1 - 10^{-cx})(10^{-kx})(10^{c})$$

در این معادله k، عامل خسارت است.

سپس اسپیلمن مستقلاً معادله محصول نهائی را پیشنهاد کرد :

(۴۵-۴)

$$y = M - AR^{x}$$

---

1 Mitscherlich - spillman production function

2 . Response function *3 . B.Baule*

این معادله همانند معادله پیشنهاد شده بوسیله میتسچرلیچ است، در این معادله M حداکثر محصول کل قابل حصول بواسطه افزایش در سطح ماده غذائی xاست . Aمقدار ثابت که گویای حداکثر واکنش قابل حصول از مورد استفاده قراردادن نهاده Xو R ضریبی است که به عنوان نسبت دو تولید فیزیکی نهائی متوالی تعریف شده است، یعنی:

$$R = \frac{MPP_i}{MPP_{i-1}} \quad (۴۶-۴)$$

بنابراین، R نسبت بین تولیدات نهائی مربوط به iامین و i-1امین واحد نهاده است. اسپیلمن برخلاف میتسچرلیچ اعتقاد داشت که مقادیر ثابت در تابع تولید با شرایط محیطی تغییر خواهد کرد. معادله (۴-۴۵) را همچنین می‌توان اینگونه نوشت:

$$Y = M - A + A - AR^x = (M - A) + A(1 - R^x) \quad (۴۷-۴)$$

که، $M - A$ستاده بدست آمده بدون استفاده از هر نهاده متغیر Xو $A(1\text{-}R^x)$، مقدار افزایش محصول یا واکنش است . $1\text{-}R^x$ موسوم به «درجه درصدی کارائی»[1] است. تابع نمائی از نوع اسپیلمن با یک نهاده متغیر در شکل (۴-۹) نشان داده شده است. از روی شکل و همچنین دلالت رابطه (۴-۴۷) اینگونه بنظر می‌رسد که منحنی ستاده ـ نهاده نسبت به Aیا M مجانب است، بسته به اینکه تنها واکنش نهاده متغیر یا ستاده کل قابل حصول نسبت به هر دو نهاده متغیر و ثابت سنجیده شود. بایل معادله میتسچرلیچ را به n نهادهٔ متغیر توسعه داد. سپس گیتنیگ[2] بعد از بایل و اسپیلمن این معادله را به nمتغیر توسعه داد، یعنی:

$$Y = A\Pi(1 - R_i^{x_i}) \quad (۴۸-۴)$$

توجه کنید که در رابطه (۴-۴۸) ، نهاده‌های متغیر نقش عوامل تعیین حد را بازی می‌کنند. حال می‌توانیم معادلات واکنش را با یک، دو و nنهاده متغیر به ترتیب زیر بنویسیم.

---

1 . Percentage sufficiency quantity

2 . Getting

$$y = A(1 - R_1^{x_1}) \qquad (۴۹-۴)$$

$$y = A(1 - R_1^{x_1})(1 - R_2^{x_2}) \qquad (۵۰-۴)$$

$$y = A\,\Pi\,(1 - R_i^{x_i}) \qquad (۵۱-۴)$$

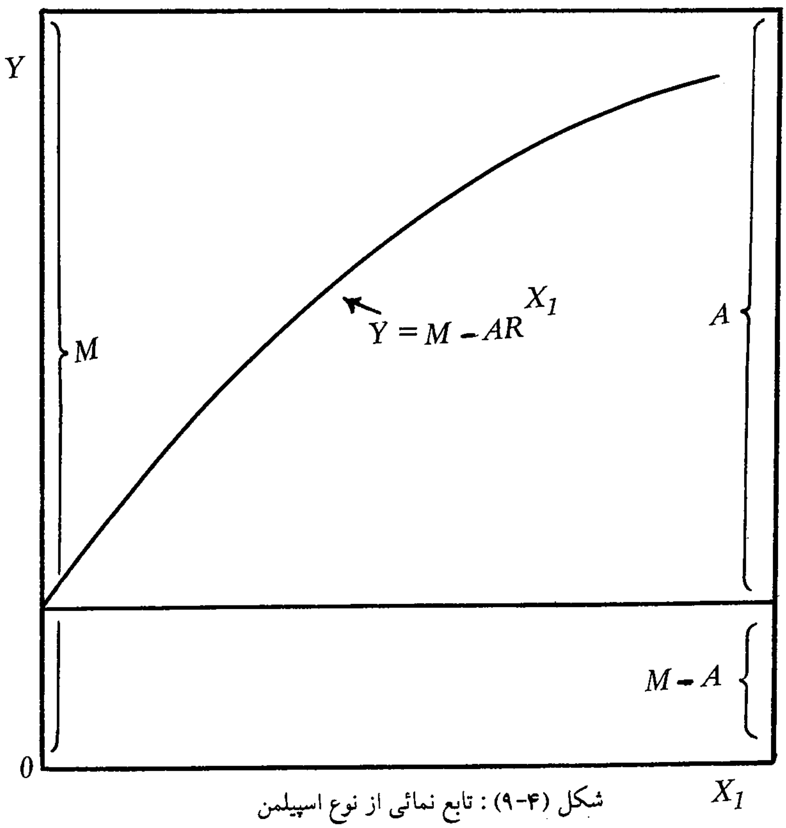
تولید متوسط *(AP)*

از تابع واکنش (۴-۴۹) با یک متغیر، تولید متوسط نسبت به نهاده X_1 (AP_1) را می‌توان بدست آورد، بطوری که :

$$AP_1 = \frac{A(1 - R_1^{x_1})}{x_1} = A(1 - R_1^{x_1})x_1^{-1} \qquad (۵۲-۴)$$

بنابراین، تولیدمتوسط نهاده X_1 تابعی از سطح همان نهاده است .

خواننده بعنوان تمرین شکل منحنی تولید متوسط بدست آمده از رابطه (۴-۵۲) را می‌تواند آزمایش کند.



شکل (۴-۹) : تابع نمائی از نوع اسپیلمن

تولید نهائی (MP_o)

معادله تولید نهائی بدست آمده از تابع تولید با یک نهاده متغیر (۴-۴۹) عبارتست از:

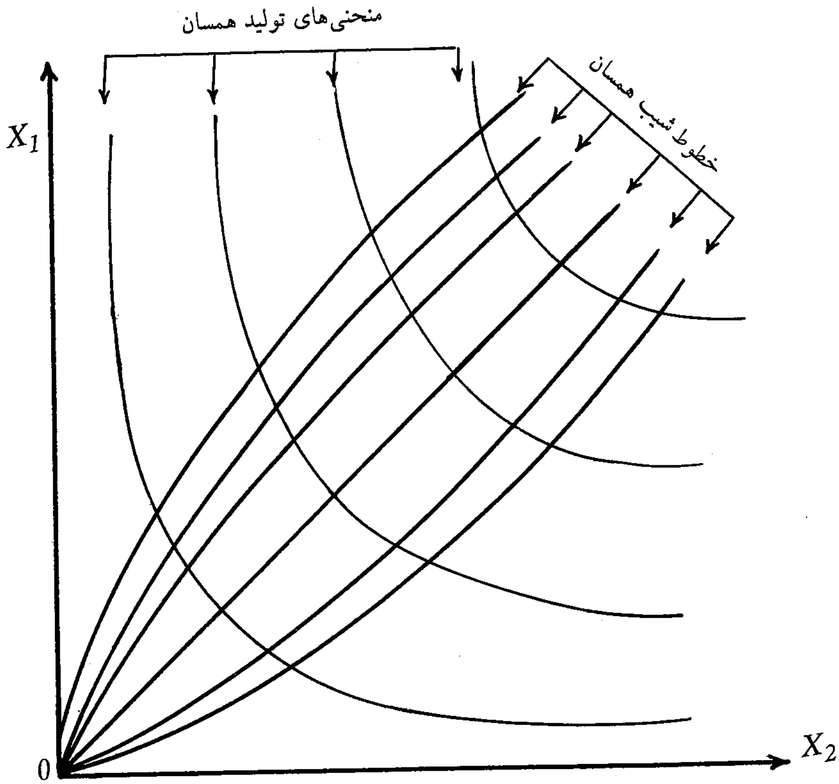
$$MP_1 = \frac{dy}{dx_1} = -AR_1^{x_1} \ln R_1 \qquad (۴-۵۳)$$

وقتی منحنی این معادله بر روی نمودار رسم شود، بخوبی مشاهده می‌گردد که منحنی تولید نهائی بدون نظر گرفتن فرض منفی نسبت به محور نهاده مجانب است. بنابراین بواسطه این ویژگی تابع تولید، این تابع برای شرایطی که یک نهاده می‌تواند آنقدر زیاد مورد استفاده قرار گیرد که تولید کل کاهش یابد و در نتیجه تولید نهائی منفی شود، مناسب نیست.

منحنی‌های تولید همسان

معادله تولید همسان استخراج شده از تابع تولید با دو نهاده متغیر عبارتست از :

$$x_1 = \ln\left[1 - \frac{y_0}{A(1 - R_2^{x_2})}\right](\ln R_1)^{-1} \qquad (۴-۵۴)$$



شکل (۴-۱۰) : منحنی‌های تولید همسان و خطوط شیب همسان برای تابع تولید اسپیلمن

رسم منحنی معادله تولید همسان بیان کننده سطوح مختلف ستاده است. منحنی‌های تولید همسان بر روی شکل نسبت به محور نهاده بطور مجانب رسم می‌گردند و تلویحاً بیان کننده این مطلب می‌باشند که یک نهاده بطور کامل جانشین یک نـهاده دیگـر نـمی‌گردد. مجموعه‌ای از منحنی‌های تولید همسان برای تابع تولید اسپیلمن در شکل (۴-۱۰) رسم شده است.

نرخ جانشینی فنی (RTS)

از معادله تولید همسان (۴-۵۴)، معادله نرخ جانشینی فنی نهاده X_2 برای نهاده X_1، (RTS_{21}) را می‌توان بدست آورد، بطوری که:

$$RTS_{21} = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{(1 - R_1^{x_1})R_2^{x_2} \ln R_2}{(1 - R_2^{x_2})R_1^{x_1} \ln R_1} \quad (۵۵\text{-}۴)$$

خواننده با استفاده از آگاهی درباره $RTS_{21} = -\frac{dX_1}{dX_2} = \frac{MP_2}{MP_1}$ به سادگی می‌تواند رابطه (۴-۵۵) را بدست آورد. بنابراین RTS_{21} تابعی از سطوح نهاده x_1 و x_2 می‌باشد.

خطوط شیب همسان

خطوط شیب همسان را می‌توان با مساوی قراردادن رابطه (۴-۵۵) با مقدار ثابت c بدست آورد، چنانکه:

$$\frac{(1 - R_1^{x_1})R_2^{x_2} \ln R_2}{(1 - R_2^{x_2})R_1^{x_1} \ln R_1} = c$$

یا

$$c(1 - R_2^{x_2})R_1^{x_1} \ln R_1 = (1 - R_1^{x_1})R_2^{x_2} \ln R_2$$
$$= R_2^{x_2} \ln R_2 - R_1^{x_1}R_2^{x_2} \ln R_2$$

یا

$$c(1 - R_2^{x_2})R_1^{x_1} \ln R_1 + R_1^{x_1}R_2^{x_2} \ln R_2 = R_2^{x_2} \ln R_2$$

یا

$$R_1^{x_1} = \frac{R_2^{x_2} \ln R_2}{c(1 - R_2^{x_2}) \ln R_1 + R_2^{x_2} \ln R_2}$$

باگرفتن لگاریتم طبیعی از هر دوطرف رابطه، داریم:

$$x_1 \ln R_1 = \ln \left[\frac{R_2^{x_2} \ln R_2}{c(1 - R_2^{x_2}) \ln R_1 + R_2^{x_2} \ln R_2}\right]$$

(۴-۵۶)

$$x_1 = \ln \left[\frac{R_2^{x_2} \ln R_2}{c(1 - R_2^{x_2}) \ln R_1 + R_2^{x_2} \ln R_2}\right] / \ln R_1$$

که رابطه (۴-۵۶)، معادله خطوط شیب همسان مربوط به تابع تولید (۴-۵۰) می‌باشد. در اینجا خطوط شیب همسان بعلت توان‌دار بودن تابع بصورت خطوط مستقیم نخواهند بود (شکل ۴-۱۰ را مشاهده کنید) و علاوه بر این، خطوط شیب همسان از مرکز مختصات عبور کرده و بطور مجانب نسبت به محور نهاده قرار دارند. یعنی در سطوح بالائی نهاده، خطوط شیب همسان به حالت خط مستقیم نزدیک می‌شوند. در نتیجه خطوط شیب همسان همانند تابع تولید درجه دوم در یک نقطه به هم نزدیک نمی‌گردند. چراکه در این تابع بجای یک نقطه مرزی یک سطح مرزی وجود دارد. ماهیت عبور کردن خطوط مقیاس از مرکز مختصات دلالت بر ترکیب نهاده متغیر برای سطوح مختلف ستاده دارد.

خطوط مرزی

خطوط مرزی در این تابع با محور نهاده یکسان است، در حقیقت براحتی می‌توان با کمک گرفتن از ماهیت منحنی‌های تولید همسان متوجه این مطلب گردید. برای این منظور خواننده باید رابطه (۴-۵۵) را مساوی صفر قرار داده و آنرا برای x_1 نسبت به x_2 یا برعکس حل نماید، تا این مسأله درباره خطوط مرزی برای تابع تولید اسپیلمن ثابت گردد.

۴-۶- تابع تولید توان‌دار

تابع تولید توان‌دار، یک تابع تولید غیرخطی است که معمولاً آن را بعنوان تابع تولید کاب-داگلاس می‌شناسیم و این اصطلاح، پسوند نام افرادیست که برای اولین بار از این تابع برای تخمین تجربی از اطلاعات سری زمانی مربوط به صنایع تولید کالا در آمریکا در طی دوره (۱۹۲۲-۱۸۹۹) استفاده نمودند. تابع تولید کاب-داگلاس یکی از گسترده‌ترین توابع مورد استفاده در تجزیه و تحلیل اقتصادی مسائل مربوط به تخمین تجربی در صنعت و کشاورزیست شکل جبری تابع با یک، دو و n نهاده متغیر به ترتیب عبارتست از :

$$y = a_0 x_1^{a_1} \qquad (۴-۵۷)$$

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \qquad (۴-۵۸)$$

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$$

$$= a_0 \Pi x_i^{a_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (۴-۵۹)$$

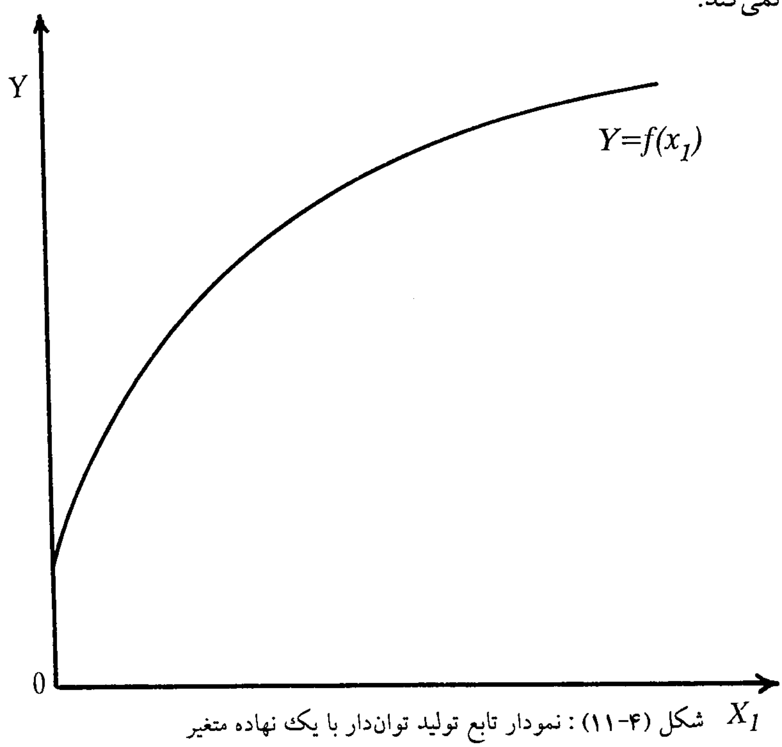
که در اینجا، y و x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ سطوح ستاده و نهاده‌ها می‌باشند. a_o مقدار ثابت و a_i $(i = 1,2, \ldots, n)$ گویای پارامتر کارائی و کششهای تـولید نـهاده‌های مـتغیر می‌باشند. شکلهای تخمین خورده معادلات مربوط به روابط (۴-۵۷) الی (۴-۵۹) به ترتیب عبارتند از :

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 \ln x_1 \qquad (۴\text{-}٦۰)$$

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 \qquad (۴\text{-}٦۱)$$

$$\ln y = \ln a_0 + \sum_i a_i \ln x_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (۴\text{-}٦۲)$$

شکل جبری تابع توان دار با یک نهاده متغیر در شکل (۴-۱۱) نشان داده شده است. این تابع تولید در استفاده از مقادیر بالائی نهاده مسطح می‌گردد. این تابع تولید بیان‌گر رویه‌ای ست که دارای نقطه حداکثر مشخصی نیست. چنین تابعی هرگز نسبت به محور نهاده، حالت نزولی پیدا نمی‌کند.



شکل (۴-۱۱) : نمودار تابع تولید توان‌دار با یک نهاده متغیر

برای تابع تولید تواندار می‌توان شرایطی را بررسی نمود، که تابع در آن اکیداً مقعر[1] است. حال تابع تولید (۴-۵۸) را در نظر بگیرید، اگر پارامترهای a_1 و a_2 کوچکتر از واحد باشند، در این صورت ، مشتقات جزئی مرتبه دوم منفی خواهد بود و این مسأله مستلزم یک سطح مقعر برای تابع است. یعنی :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = a_1(a_1 - 1)\frac{y}{x_1^2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = a_2(a_2 - 1)\frac{y}{x_2^2} < 0$$

همچنین این مسأله مستلزم آن است که دترمینال مربوط را بررسی نمائیم.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

که از دترمینال مذکور این مقدار حاصل می‌گردد. $\frac{a_1 a_2 y^2}{x_1^2 x_2^2}(1 - a_1 - a_2)$ ، که این مقدار با توجه به مقادیر a_1، a_2 می‌تواند بزرگتر ، برابر و کوچکتر از صفر باشد. اگر $a_1+a_2 < 1$ باشد، مقدار دترمینال مثبت و تابع تولید، اکیداً مقعر برای تمامی سطوح $x_1 x_2>0$ است. اگر $a_1 + a_2 = 1$ باشد، مقدار دترمینال صفر و تابع تولید مقعر است، اما نه بطور کامل. نهایتاً اگر $a_1 + a_2 > 1$ باشد، مقدار دترمینال منفی و تابع تولید نه مقعر و نه محدب است. اینها مواردی بودند که باید هنگام استفاده از تابع تولید تواندار برای تجزیه و تحلیل مسائل اقتصادی مد نظر قرار داد.

تولید متوسط AP

از رابطه (۴-۵۹) ، تولید متوسط نسبت به نهاده i (AP_i) در سطوح داده شده برای تمامی نهاده‌ها بدست می‌آید. بطوری که :

$$AP_i = y/x_i \qquad (۶۳\text{-}۴)$$

---

1 . Strictly concave

از AP_i بدست آمده از رابطه (۴-۵۷) ملاحظه می‌گردد که تولید متوسط نهاده X_1 تابعی از سطح همان نهاده X_1 است.

تولیدنهایی (MP)

تولید نهائی نسبت به نهاده i، (MP_i) در سطوح داده شده برای تمامی دیگر نهاده‌ها را با استفاده از مشتق جزئی مرتبه اول از y نسبت به x_i می‌توان بدست آورد.

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = MP_i = a_i x_i^{a_i-1} a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_{i-1}^{a_{i-1}} x_{i+1}^{a_{i+1}}, \ldots, x_n^{a_n}$$

$$= a_i x_i^{-1} a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}, \ldots, x_n^{a_n} \qquad (۴\text{-}۶۴)$$

$$= a_i x_i^{-1} y = a_i \frac{y}{x_i}$$

همانند AP_i، MP_i نیز تابعی از x_i است. در یک حالت معمولی بازده‌های نهاده X_i نزولی است، یعنی $\frac{\partial_2 y}{\partial x_i^2}$ باید منفی باشد، که این مطلب در صورتی وجود دارد که $0<a_i<1$ باشد. همچنین، MP_i باید همیشه غیرمنفی و نزولی باشد. تابع تولید نهائی ممکن است به یکی از حالتهای ثابت ، صعودی یا نزولی وجود داشته باشد و هر سه حالت یا حتی دو حالت در یک زمان برای تابع امکان‌پذیر نیست.

منحنی تولید همسان

معادله تولید همسان، $x_1 = g(x_2)$ مربوط به رابطه (۴-۵۹) عبارتست از :

$$x_1 = [y^0/(a_0 x_2^{a_2} x_3^{a_3} \ldots x^{a_n})]^{1/a_1}$$

که، $x_3, x_4, \ldots, x_n$ مقادیر ثابت در سطوح معین می‌باشند. به سهولت می‌توان ملاحظه نمود که تولید همسانهای این قبیل تابع، نسبت به محور نهاده مجانب می‌باشند . به همین طریق معادله تولید همسان رابطه (۴-۵۸) عبارتست از :

$$x_1 = \left(\frac{y_0}{a_0 x_2^{a_2}}\right)^{1/a_1} = \left(\frac{y^0}{a_0}\right)^{1/a_1} x_2^{-a_2/a_1} \qquad (۴\text{-}۶۶)$$

هر یک از منحنی‌های تولید همسان را می‌توان از این یکی بدست آورد. بدین منظور، مقادیر نهادها ضربدر نسبت مربوط به دو مقدار ستاده‌ها می‌شود. بنابراین بدیهی است که استفاده از منابعی که دارای محدودیت می‌باشند، چنانکه هر یک از نهاده‌ها صفر فرض شوند،

یعنی صفر شدن ستاده. منحنی‌های تولید همسان بطور کلی دارای شیب منفی و نسبت به مرکز مختصات برای مقادیر مثبت نهاده در ناحیه معقول تولید اکیداً محدب می‌باشند. برای پی‌بردن به این موضوع به تابع تولید (۴-۵۸) با $a_1, a_2>0$ و $x_1 x_2>0$ و Y، MP_1 و MP_2 مثبت توجه نمائید. با گرفتن مشتق جزئی مرتبه دوم x_1 نسبت به x_2 از معادله تولید همسان داریم:

$$\frac{d^2x_1}{dx_2^2} = \frac{a_2(a_1 + a_2)}{a_1^2}\left(\frac{y^0}{a_0}\right)^{1/a_1} x_2^{-(2a_1+a_2)/a_1} > 0 \qquad (۴-۶۶)$$

بدین ترتیب ثابت می‌گردد که منحنی‌های تولید همسان نسبت به مرکز مختصات محدب می‌باشند.

نرخ جانشینی فنی (RTS)

از رابطه (۴-۵۸)، نرخ جانشینی فنی نهاده x_2 برای x_1 یعنی RTS_{21} را می‌توان بدست آورد، بطوری که:

$$RTS_{21} = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_2}{a_1}\frac{x_1}{x_2} \qquad (۴-۶۷)$$

به همین نحو، از رابطه (۴-۵۹)، RTS_{ji} را می‌توان بدست آورد، چنانکه:

$$RTS_{ji} = -\frac{dx_i}{dx_j} = \frac{a_j}{a_i}\frac{x_i}{x_j} \qquad (۴-۶۸)$$

بنابراین، نرخ جانشینی فنی بین نهادهای j و i، (RTS_{ji}) در جائیکه آن دو نهاده ترکیب می‌گردند، یک تابع خطی نسبت به $\frac{x_i}{x_j}$ است. هرگاه x_j و x_i با یک نسبت ثابت افزایش یابند، RTS_{ji} بطور ثابت باقی می‌ماند، حتی اگر سطح ستاده افزایش یابد، چنانکه هست. این مسأله تا حدودی دربارهٔ واحدهای عوامل تولید همچون زمین یا حیوان غیرواقعی است.

خطوط شیب همسان

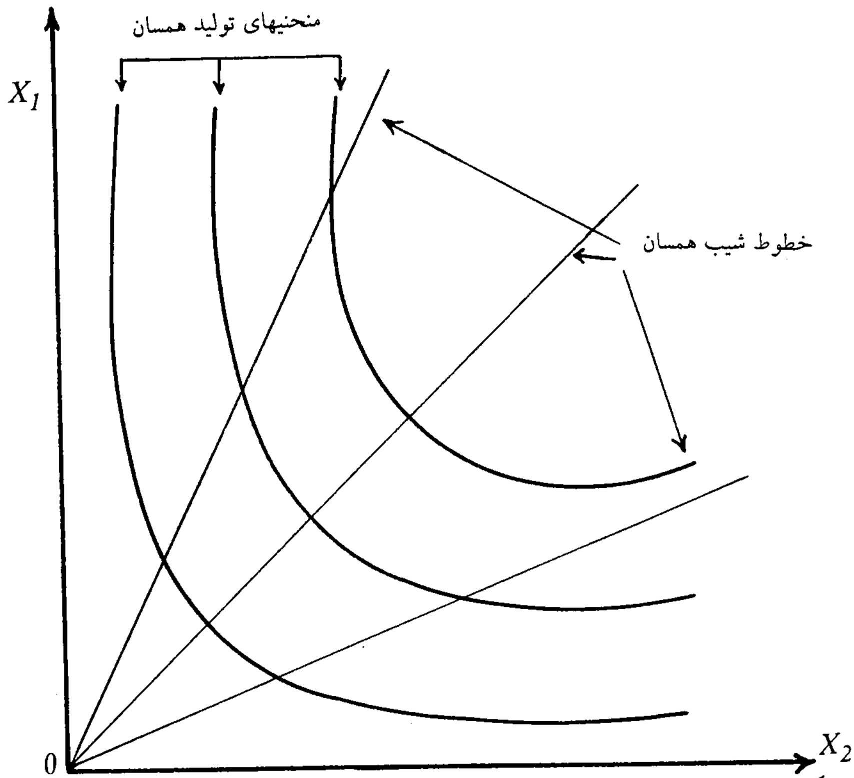
با مساوی قرار دادن رابطه (۴-۶۶) با مقدار ثابت K_{ji}، معادله خطوط شیب همسان را می‌توان بدست آورد، بطوری که:

$$\frac{a_j}{a_i}\frac{x_i}{x_j} = K_{ji}$$

x_i را بر حسب x_j می‌توان بدست آورد، بدین ترتیب

$$x_i = K_{ji}\frac{a_i}{a_j}x_j \qquad (۴-۶۹)$$

که رابطه (۴-۶۹) یک معادله خطی با عرض از مبدأ صفر می‌باشد. بنابراین خطوط شیب همسان، خطوط مستقیمی هستند که از مرکز مختصات عبور می‌کنند. خطوط شیب همسان، خطوط مقیاس را که بیان کننده نسبت ثابت یا ترکیب بین دو نهاده متغیر در سطوح مختلف ستاده می‌باشند نیز دربر می‌گیرند. شکل (۴-۱۲) یک خانواده از منحنی‌های تولید همسان و خطوط شیب همسان را برای تابع تولید توان‌دار با دو نهاده متغیر نشان می‌دهد.



شکل (۴-۱۲) : خانواده منحنیهای تولید همسان و خطوط شیب همسان برای تابع تولید توان‌دار

خطوط مرزی

خطور مرزی مربوط به $RTS_{ji} = 0$ و $RTS_{ij} = 0$ عبارتند از :

$$x_i = 0 \tag{۷۰-۴}$$

$$x_j = 0 \tag{۷۱-۴}$$

بنابراین، این دو خط مرزی در یک فضای دوبعدی مساوی با محور نهاده‌ها بوده و با زاویه ۹۰ درجه نسبت به مرکز مختصات رسم می‌گردند و گویای نرخ جانشینی فنی صفر می‌باشند.

کشش تولید نسبت به نهاده X_I

کشش تولید نسبت به هر نهادهٔ متغیر، مثلاً X_i را می‌توان از رابطه (۴-۵۹) بدست آورد، بطوری که:

$$E_{p_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i}\,\frac{x_i}{y} = \frac{a_i y}{x_i}\,\frac{x_i}{y} = a_i \qquad (۴-۷۲)$$

از رابطه (۴-۶۲) با استفاده از فرمول دیگری، Ep_i را نیز می‌توان بدست آورد، که عبارتست از:

$$E_{p_i} = \frac{\ln y}{\ln x_i} = a_i$$

بدین ترتیب، ممکن است متوجه شده باشید که توان مربوط به نهاده متغیر، بطور مستقیم کشش تولید مربوط به آن نهاده را مشخص می‌نماید. بنابراین، ضرائب کشش نسبت به هر نهاده متغیر، ثابت و بدون ارتباط با سطح نهاده یا ستاده است. در حال حاضر بعضی از تلاشها، موفق به از بین بردن محدودیت برای تابع تولید کاب ـ داگلاس گردیده است. از جمله این گونه تلاشهای موفق و برجسته، مقاله $E.F$، یولولینگ[1] و $L.B$، فلتجر[2] می‌باشد که بر متغیر بودن کشش تولید در تابع کاب ـ داگلاس اشاره دارد.

کشش جانشینی

این تابع از این جهت که دارای کشش جانشینی ثابت بین هر مجموعه دو نهاده متغیر است دچار محدودیت بزرگ می‌باشد. این مسأله را بوسیله استفاده از رابطه (۴-۵۹) می‌توان ثابت نمود، بطوری که:

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}, \qquad a_1, a_2 > 0$$

1 . Ulveling   2 . Fletcher

با بدست آوردن RTS_{21}، چنانکه :

$$RTS_{21} = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{MP_2}{MP_1} = \frac{a_2(y/x_2)}{a_1(y/x_1)} = \frac{a_2}{a_1}\frac{x_1}{x_2}$$

بدین ترتیب داریم :

$$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{a_1}{a_2}\frac{dx_1}{dx_2}$$

بنابراین

$$ES_{21} = \frac{d(x_1/x_2)}{d(-dx_1/dx_2)}\frac{-dx_1/dx_2}{x_1/x_2} = \frac{a_1}{a_2}\frac{(a_2/a_1)(x_1/x_2)}{x_1/x_2} = 1 \qquad (۴-۷۳)$$

با گسترش تابع تولید با کشش جانشینی ثابت (CES)[1] بوسیله آرو[2]، چنری[3]، مینهاس[4] و سولو[5]، این محدودیت تابع تولید تواندار از بین رفت.

بازده‌های نسبت به مقیاس

بازده‌های نسبت به مقیاس برای این نوع تابع تولید به آسانی برآورد می‌گردد، بدین ترتیب که $i = 1,2,3, \dots , n$ و $\sum (\frac{\partial y}{\partial x_i})(\frac{x_i}{y})$ = بازده‌های نسبت به مقیاس را با استفاده از این معادله نسبت به رابطه (۴-۵۹)، بدست می‌آوریم :

$$\text{بازده‌های نسبت به مقیاس} = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \Sigma a_i \qquad (۴-۷۴)$$

$$i = 1,2,3, \dots , n$$

بنابراین، مجموع توانهای تمامی نهاده‌های متغیر، مستقیماً برآورد ساده‌ای از بازده‌های نسبت به مقیاس و نیز درجه همگنی تابع تولید به دست می‌دهد. بازده‌های نسبت به مقیاس بسته به اینکه a_i کوچکتر، برابر یا بزرگتر از واحد باشد، نزولی، ثابت یا صعودی می‌باشند.

---

1 . *Constant Elasticity of Substitution production function*

2 . *K. J. Arrow*

3 . *H.B. Chennery*

4 . *B.S. Minhas*

5 . *R.M.Solow*

تعمیم تابع تولید کاب ـ داگلاس

تابع تولید کاب ـ داگلاس در بعضی از اشکال تعمیم یافته است، بطوری که بعضی از مهمترین شکلهای عمومی آن عبارتست از :

۱ـ تابع تولید ترانسن‌دنتال[1]

این نوع توابع تولید با یک، دو و n نهاده متغیر در روابط (۴-۸۱) الی (۴-۸۳) در بخش (۴-۷) ارائه شده‌اند.

۲ـ تابع تولید زلنر ـ راوانکار[2]

این تابع تولید با دو نهاده متغیر بدین گونه نوشته می‌شود.

$$ye^{by} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}, \qquad b \geqslant 0 \tag{۴-۷۵}$$

که وقتی $b = 0$ باشد، شکل تابع به شکل تابع کاب ـ داگلاس تبدیل می‌گردد. باگرفتن لگاریتم در رابطه (۴-۷۵) می‌توان اینگونه نوشت :

$$\ln y + by = \ln a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 \tag{۴-۷۶}$$

با مقایسه این شکل تابع با شکل تابع ترانسن‌دنتال، به نظر می‌رسد که یکی قرینه تابع دیگر است. در این شکل تابع ، ستاده و نمایش لگاریتمی ستاده در طرف چپ معادله قرار دارد در حالیکه در تابع ترانسن‌دنتال نهاده‌ها و نمایش لگاریتمی نهاده‌ها در سمت راست قرار دارند.

۳ـ تابع تولید نرلاو ـ رینگستاد[3]

با دو نهاده متغیر این تابع تولید را اینگونه می‌توان نوشت :

$$y^{1+b \ln y} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}, \qquad b \geqslant 0 \tag{۴-۷۷}$$

---

1 . *Transcendental production function*
2 . *Zellner - Revankar production function*
3 . *Nerlove - Ringstad production function*

محدودیت برای این تابع وقتی است که $b = 0$ باشد. این شکل از تابع تولید، تبدیل یافته شکل تابع کاب ـ داگلاس است. باگرفتن لگاریتم از رابطه (۴-۷۷) ، تابع مذکور عبارت خواهد بود از :

$$(1 + b \ln y) \ln y = \ln a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 \qquad (۷۸\text{-}۴)$$

بدین ترتیب Lny و $(Lny)^2$ در طرف چپ معادله ظاهر می‌شوند.

۴ـ تابع تولید باکشش جانشینی ثابت (CES)

تابع تولید باکشش جانشینی ثابت (CES) همچنین یکی دیگر از شکلهای مهم تعمیم یافته تابع کاب ـ داگلاس است. این تابع نشان داده می‌شود بوسیله معادله :

$$y = A[\delta x_1^{-\rho} + (1 - \delta) x_2^{-\rho}]^{-1/\rho} \qquad (۷۹\text{-}۴)$$

که در چنین تابعی $A>0$، $1>\delta>0$ و $\rho>-1$ است. در حالت حد تابع، $\rho \to 0$ این تابع تبدیل می‌شود به :

$$y = A x_1^{\delta} x_2^{1-\delta} \qquad (۸۰\text{-}۴)$$

بنابراین وقتی $\rho = 0$ است، تابع تولید CES به تابع کاب ـ داگلاس تبدیل می‌شود البته این واقعیت را از رابطه (۴-۷۹) نمی‌توان دریافت ولی با استفاده از قانون هپتال[1] می‌توان ثابت نمود که اگر :

$$\lim_{x \to b} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to b} g(x) = 0$$

و اگر

$$\lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$$

سپس

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

باگرفتن لگاریتم طبیعی از هر دو طرف رابطه (۴-۷۹) ، بدست می‌آوریم :

1 . *L'Hopital's rule*

$$\ln y = \ln A - \frac{1}{\rho} \ln [\delta x_1^{-\rho} - (1 - \delta) x_2^{-\rho}]$$

یا

$$\ln y - \ln A = \frac{-\ln [\delta x_1^{-\rho} - (1 - \delta) x_2^{-\rho}]}{\rho} = \frac{f(\rho)}{g(\rho)}$$

که $f(\rho)$ و $g(\rho)$ به سمت صفر میل می‌کنند چنانچه ρ به سمت صفر میل کند. حال با گرفتن مشتق از صورت کسر، خواهیم داشت.

$$f'(\rho) = \frac{\delta x_1^{-\rho} \ln x_1 + (1 - \delta) x_2^{-\rho} \ln x_2}{x_1^{-\rho} + (1 - \delta) x_2^{-\rho}}$$

چنانچه ρ به سمت صفر میل کند، رابطه فوق به $\delta L_n x_1 + (1-\delta) L_n x_2$ نزدیک می‌شود. وقتیکه $g'(\rho) = 1$ باشد با استفاده از قانون هپیتال، حالت حد عبارتست از :

$$\ln y - \ln A = \delta \ln x_1 + (1 - \delta) \ln x_2$$

که یعنی :

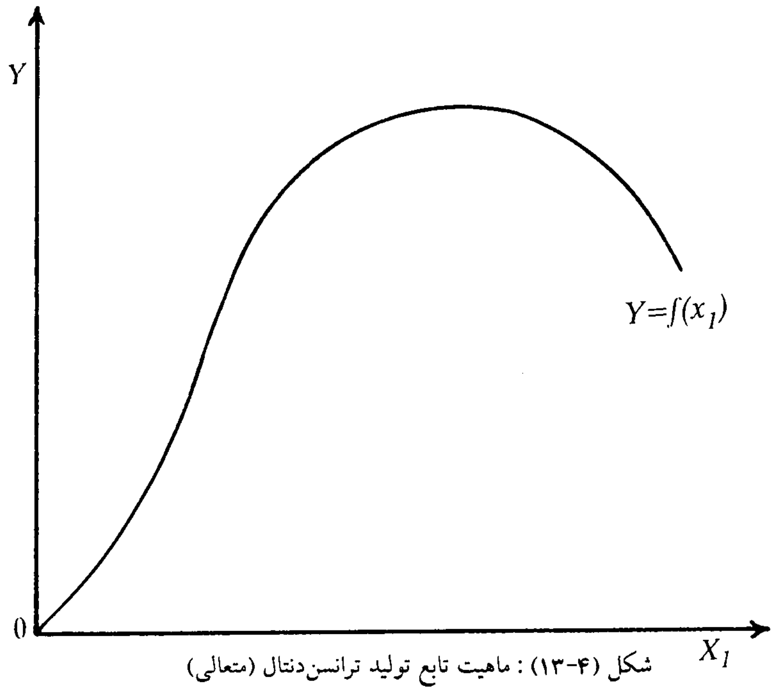
$$y = A x_1^{\delta} x_2^{1-\delta}$$

بعضی از این اشکال مهم تابع تولید بطور مفصل در بخش (۴-۷)، (۴-۹) و (۴-۱۰) مورد بحث قرار می‌گیرند.

۴-۷ تابع تولید ترانسن‌دنتال (متعالی)

تابع تولید ترانسن‌دنتال اولین بار بوسیله هالتر[1] پیشنهاد گردید. این تابع در واقع یک پیوندی بین معادلات نهائی و توان‌دار است. این تابع تولید قادر است بهره‌وری نهائی غیرثابت را یعنی صعودی، نزولی و منفی بودن تولید نهائی را بطور مجزا، در دو ناحیه یا هر سه ناحیه نشان دهد. در نتیجه این شکل تابع تولید در تشریح اطلاعات ستاده ـ داده که شامل هرسه ناحیه تولید با تولید نهائی مثبت صعودی، مثبت نزولی و منفی می‌باشد قابل استفاده است. علاوه بر این همچنین در این تابع، کشش تولید و کشش جانشینی در دامنه تغییرات نهاده‌ها متغیر می‌باشند. منحنی تابع تولید ترانسن‌دنتال (متعالی) با یک نهاده در شکل (۴-۱۳) نشان داده شده است.

1 . Halter



شکل (۴-۱۳) : ماهیت تابع تولید ترانسن‌دنتال (متعالی)

معادلات جبری تابع تولید ترانسن‌دنتال با یک، دو و چندین نهاده به ترتیب عبارتند از:

$$y = a_0 x_1^{a_1} e^{b_1 x_1} \qquad (۸۱-۴)$$

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} e^{b_1 x_1 + b_2 x_2} \qquad (۸۲-۴)$$

$$y = a_0 \Pi \, x_i^{a_i} e^{b_i x_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (۸۳-۴)$$

در روابط (۴-۸۱) الی (۴-۸۳)، yمقدار ستاده کل، $x_1, x_2, \ldots, x_n$، سطوح نهاده و a_o, a_i, b_iمقادیر ثابت بوده چنانکه $a_o>0$ و $b_i \leq 0$می‌باشند. در این تابع تولید اگر b_i را در نظر نگیریم، این تابع به تابع تولید کاب ـ داگلاس تبدیل می‌گردد. اگر از دوطرف معادله تابع تولید داده شده در رابطه (۴-۸۳) لگاریتم طبیعی بگیریم، یعنی :

$$\ln y = \ln a_0 + \Sigma a_i \ln x_i + \Sigma b_i x_i \qquad (۸۴-۴)$$

بدین ترتیب، y تابع خطی از سطوح نهاده (x_i) و همچنین لگاریتم سطوح نهاده‌ها خواهد بود.

تولید متوسط

تولید متوسط نسبت به نهاده X_1، (AP_1) از رابطه (۴-۸۱) بدست می‌آید، بطوری که عبارتست از :

$$AP_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{a_0 x_1^{a_1} e^{b_1 x_1}}{x_1} = a_0 x_1^{a_1 - 1} e^{b_1 x_1} \qquad (۴\text{-}۸۵)$$

همانند تابع تولید اسپیلمن، اینجا نیز تولید متوسط نهاده X_1 تابعی از سطح همان نهاده است. بنابراین بوضوح منحنی تولید متوسط غیرخطی است.

تولید نهائی

براس استخراج معادله تولید نهائی برای نهاده X_1، یعنی MP_1، مشتق مرتبه اول y نسبت به x_1 را در رابطه (۴-۸۱) بدست می‌آوریم، بدین ترتیب :

$$MP_1 = \frac{dy}{dx_1} = y\left(\frac{a_1}{x_1} + b_1\right) \qquad (۴\text{-}۸۶)$$

از رابطه (۴-۸۶) سطح نهاده اختصاص داده شده به حداکثر ستاده و سطح نهاده مربوط به نقطه عطف را بر روی منحنی تولید می‌توان پیدا نمود.

برای بدست آوردن سطح حداکثر ستاده X_1، معادله (۴-۸۶) را مساوی صفر قرار داده و برای x_1 حل می‌کنیم، که عبارتست از :

$$y\left(\frac{a_1}{x_1} + b_1\right) = 0$$

در صورتیکه $y \neq 0$ باشد

$$\frac{a_1}{x_1} + b_1 = 0$$

یا

$$x_1 = -\frac{a_1}{b_1} \qquad (۴\text{-}۸۷)$$

سطح حداکثر ستاده را بوسیله جایگزین نمودن مقدار x_1 از رابطه (۴-۸۷) در رابطه (۴-۸۱) می‌توان بدست آورد. همچنین سطح نهاده را در نقطه عطف بوسیله مساوی صفر قراردادن مشتق مرتبه دوم می‌توان بدست آورد.

$$\frac{d^2y}{dx_1^2} = y\left(\frac{a_1^2 - a_1}{x_1^2} + \frac{2a_1b_1}{x_1} + b_1^2\right) = 0$$

حال معادله مذکور را برای x_1 حل می‌کنیم، که خواهیم داشت:

$$x_1 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1}}{b_1} \qquad (۴-۸۸)$$

سطح ستاده مربوط به نقطه عطف را بوسیله جایگزین نمونه مقدار x_1 از رابطه (۴-۸۸) در رابطه (۴-۸۱) می‌توان بدست آورد.

منحنی‌های تولید همسان

بواسطه y مساوی یک مقدار ثابت (مثلاً y^0)، معادله منحنی تولید همسان مربوط به تابع تولید با دو نهاده متغیر را از رابطه (۴-۸۲) می‌توان بدست آورد. نتیجه این معادله، یک تابع ضمنی نسبت به x_1 و x_2 است که آن را برای یک متغیر بر حسب متغیر دیگر می‌توان حل نمود. این معادله عبارتست از:

$$\ln x_1 + mx_1 = u \ln x_2 + vx_2 + k \qquad (۴-۸۹)$$

که

$$m = \frac{b_1}{a_1}, \qquad u = -\frac{a_2}{a_1}, \qquad v = -\frac{b_2}{a_1} \qquad k = \frac{1}{a_1}(\ln y^0 - \ln a_0)$$

نرخ جانشینی فنی (RTS)

از تابع تولید (۴-۸۲) با دو نهاده متغیر، نرخ جانشینی فنی x_2 برای x_1 را می‌توان بدست آورد.

$$RTS_{21} = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{MP_2}{MP_1}$$

$$= \frac{\partial y/\partial x_2}{\partial y/\partial x_1} = \frac{x_1}{x_2}\frac{a_2 + b_2x_2}{a_1 + b_1x_1} \qquad (۴-۹۰)$$

بنابراین، RTS_{21} تابعی از سطوح نسبت نهاده یعنی X_1 و X_2 است.

خط شیب همسان

با مساوی قراردادن رابطه (۴-۹۰) با مقدار ثابتی مانند k و حل آن برای x_2 بر حسب x_1، معادله خط شیب همسان بدست می‌آید، بطوری که داریم:

$$x_2 = \frac{a_2 x_1}{x_1(kb_1 - b_2) + ka_1} \qquad (۹۱-۴)$$

رابطه (۴-۹۱) گویای این مطلب است که خطوط شیب همسان از مرکز مختصات عبور کرده و غیرخطی باشند.

خطوط مرزی

برای دستیابی به خطوط مرزی، رابطه (۴-۹۰) را مساوی صفر قرار داده و برای x_2 نسبت به x_1 حل می‌کنیم. بدینصورت معادله خط مرزی حاصل می‌گردد که عبارتست از:

$$x_2 = -\frac{a_2}{b_2} \qquad (۹۲-۴)$$

به همین نحو، دیگر معادله خط مرزی مربوط به $RTS_{12} = 0$، عبارتست از:

$$x_1 = -\frac{a_1}{b_1} \qquad (۹۳-۴)$$

معادلات (۴-۹۲) و (۴-۹۳) بیان کننده دو خط مرزی هستند که به ترتیب خطوط مستقیم و موازی با محورهای نهاده x_1 و x_2 می‌باشند. این خطوط مرزی با زاویه ۹۰ درجه با محورهای نهاده برخورد می‌کنند و بیان کننده یک سطح حداکثر منحصربفرد ستاده برای تابع تولید ترانسن دنتال می‌باشند.

کشش تولید Ep

از رابطه (۴-۸۱)، عبارت کشش تولید نسبت به x_1 را می‌توان بدست آورد، بطوری که:

$$E_{P_1} = \frac{MP_1}{AP_1} = \frac{y(a_1/x_1 + b_1)}{yx_1^{-1}}$$
$$= \left(\frac{a_1}{x_1} + b_1\right)x_1 = a_1 + b_1x_1 \qquad (۹۴-۴)$$

رابطه (۴-۹۴)، بدین مفهوم است که کشش تولید هر نهاده ثابت نبوده و تابع غیرخطی از سطح همان نهاده است، بدین ترتیب این تابع بر محدودیت کشش تولید ثابت که در تابع توان‌دار وجود داشت غلبه نموده است.

۴-۸ معادله مقاومت

بال میکاند[1] بر اساس «فرمول مقاومت» ماسکل[2] معادله‌ای پیشنهاد کرد که شکل اصلاح شده‌ای از آن چنین است :

$$y^{-1} = a_0 + a_1(a_2 + x_1)^{-1} \qquad (۹۵-۴)$$

که a_o، a_1 و a_2 مقادیر ثابت (پارامتر) تابع می‌باشند. در این صورت رابطه (۴-۹۵) یک تابع واکنش کود است که x_1 مقدار افزایش ماده غذائی (کود)، a_2 مقدار ماده غذائی موجود در خاک و y نیز بازده محصول است.

معادله (۴-۹۵) یک تابع تولید، بطور مجانب با سطح حداکثر بازده (y)، $\frac{1}{a_o}$ است.

معادله MP_1 مربوط به رابطه (۴-۹۵) عبارتست از :

$$MP_1 = \frac{dy}{dx_1} = a_1[a_1 + a_0(a_2 + x_1)]^{-2} \qquad (۹۶-۴)$$

بنابراین، این شکل تابع تولید فقط مقادیر مثبت تولید نهائی را می‌پذیرد، چنانکه MP_1 داده شده بوسیله (۴-۹۶) با محور نهاده مجانب است.

۴-۹ تابع تولید باکشش جانشینی ثابت *(CES)*

تاریخ گسترش تابع تولید باکشش جانشینی ثابت، مشابهت قابل ملاحظه‌ای با تابع تولید کاب ـ داگلاس دارد. انگیزه بررسی تجربی این تابع، مشاهداتی بود که نشان میداد، سهم کار

---

1 . *B.Balmukand*

2 *Maskell's "Resistance formula"*

در درآمد ملی ثابت نیست، بلکه با تغییر نرخهای دستمزد، تغییر میکند.

$$\frac{Y}{L} = \frac{W}{d} \qquad (۹۷-۴)$$

که Y، درآمد ملی، L سطح نیروی کار، W نرخ دستمزد و d مقدار ثابت است.

آرو، چنری، مینهاس و سولو فرض برابر بودن کشش جانشینی ثابت با مقدار واحد تابع کاب ـ داگلاس را مورد آزمایش قرار دادند. آنها شکل معادله تابع تولیدی (CES) را پیشنهاد کردند با کشش جانشینی ثابت σ. در این معادله کشش جانشینی ثابت برای محصول می‌تواند برابر با مقدار واحد نباشد.

$$y = A[\delta x_1^{-\rho} + (1 - \delta)x_2^{-\rho}]^{-1/\rho} \qquad (۹۸-۴)$$

که x_1 و x_2 مقادیر دو عامل تولید مانندسرمایه و نیروی کار هستند و A، σ و ρ مقادیر ثابت (پارامتر) که باید $A>0$، $0<\delta<1$ و $\rho>-1$ باشند.

A در این تابع، پارامتر کارائی است و در این نوع تابع تولید همان نقشی را به عهده دارد که a_o در تابع تولید کاب ـ داگلاس دارد. δ پارامتر توزیع است که بیان کننده سهم نسبی عوامل در تولید می‌باشد. ρ پارامتر جانشینی است که تعیین کننده ارزش کشش جانشینی می‌باشد.

به راحتی می‌توان ملاحظه نمود که تابع CES همگن از درجه یک است. بطوری که اگر به ترتیب جای x_1 و x_2 را با kx_1 و kx_2، در صورتیکه $k \neq 0$ باشد، عوض کنیم. مقدار ستاده در رابطه (۴-۹۸) از Y تغییر خواهد کرد به:

$$A[\delta(kx_1)^{-\rho} + (1 - \delta)(kx_2)^{-\rho}]^{-1/\rho} = A[k^{-\rho}\{\delta x_1^{-\rho} + (1 - \delta)x_2^{-\rho}\}]^{-1/\rho}$$
$$= (k^{-\rho})^{-1/\rho}y = ky$$

بدین ترتیب مشخص می‌گردد که تابع تولید CES دارای بازده ثابت نسبت به مقیاس است، بنابراین یک چنین تابعی دارای شرایط لازم برای کاربرد تئوری اولر[1] باشد.

با نادیده گرفتن جملات مراتب بالاتر، یک تقریب لگاریتمی از (۴-۹۸) را تا مرتبه دوم می‌توان بصورت زیر (آن گونه که ج ـ کمنتا انجام داده است) بدست آورد.

1 . Euler's Theorem

$$\ln y = \ln A + \delta \ln x_1 + (1-\delta)\ln x_2 - \frac{\rho}{2}\delta(1-\delta)(\ln x_1 - \ln x_2)^2 + v \qquad (۹۹-۴)$$

که v مقیاس غفلت از جملات مراتب بالاتر می‌باشد. رابطه (۴-۹۹) شکل تخمین تابع تولید CES را بیان می‌کند. البته در رابطه (۴-۹۹) به این نکته توجه دارید که نسبت x_1 به x_2 بصورت مربع لگاریتمی وجود دارد و این مسأله وجه تمایز این تابع با تابع تولید عمومی کاب ـ داگلاس با دو نهاده می‌باشد.

تولید متوسط (AP)

از تابع تولید در رابطه (۴-۹۸)، تولید متوسط (AP_1) را می‌توان بدست آورد.

$$AP_1 = x_1^{-1}y = x_1^{-1}A[\delta x_1^{-\rho} + (1-\delta)x_2^{-\rho}]^{-1/\rho} \qquad (۱۰۰-۴)$$

از رابطه (۴-۱۰۰) می‌توان نشان داد که معادله تولید متوسط همگن از درجه صفر است.

تولید نهائی (MP)

تولید نهائی (MP_i) را نسبت به نهاده‌های X_1 و X_2، بوسیله مشتق مرتبه اول از y در رابطه (۴-۹۸) به ترتیب نسبت به x_1 و x_2 می‌توان بدست آورد. با استفاده از علامت $[\ ]$ به جای $[\delta x_1^{-\rho} + (1-\delta)x_2^{-\rho}]$ جهت خلاصه نمودن رابطه، معادلات تولید نهائی را می‌توان بدست آورد، بطوری که:

$$MP_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = A\left(-\frac{1}{\rho}\right)[\ldots]^{-(1/\rho)-1}(\delta)(-\rho)x_1^{-\rho-1} \qquad (۱۰۱-۴ \text{ الف})$$

$$= \delta A[\ldots]^{(-1/\rho)-1}x_1^{-\rho-1}$$

$$= \delta A[\ldots]^{-[(1+\rho)/\rho]}x_1^{-(1+\rho)}$$

$$= \delta\,\frac{A^{1+\rho}}{A^{\rho}}[\ldots]^{-[(1+\rho)/\rho]}x_1^{-(1+\rho)}$$

$$= \frac{\delta}{A^{\rho}}\{A[\ldots]^{-1/\rho}\}^{1+\rho}x_1^{-(1+\rho)}$$

$$= \frac{\delta}{A^{\rho}}\left[\frac{y}{x_1}\right]^{1+\rho} \qquad \text{(۴-۱۰۱ ب)}$$

باتوجه به شرایط، $A>0$، $0 < \delta < 1$ و $\rho > -1$، MP_1 بدست آمـده از رابـطه (۴-۱۰۱) مثبت است، یعنی :

$$\frac{\delta}{A^{\rho}}\left(\frac{y}{x_1}\right)^{1+\rho} > 0$$

بطور مشابه MP_2 را نیز می‌توان بدست آورد

$$MP_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{1-\delta}{A^{\rho}}\left(\frac{y}{x_2}\right)^{1+\rho} \qquad \text{(۴-۱۰۲)}$$

هـمانند MP_1، در رابـطه (۴-۱۰۱)، MP_2 در رابطه (۴-۱۰۲) بـرای $A>0$، $0<\delta<1$ و $\rho>-1$ مثبت می‌باشد، این توابع تولید نهائی همگن از درجه صـفر مـی‌باشند. بوسیله دیفرانسیل‌گیری از روابط (۴-۱۰۱) و (۴-۱۰۲) نسبت به x_1 و x_2 می‌توان ثابت نمود که تابع تولیدی CES بواسطه بازده‌های نزولی نسبت به هر یک از نهاده‌های X_1 و X_2 برای تمامی سطوح مثبت آن نهاده‌ها دارای صفت ویژه می‌باشد.

منحنی‌های تولید همسان

منحنی تولید همسان بوجود آمده بوسیله تابع تولید CES، معمولاً دارای شیب منفی و محدب نسبت به مرکز مختصات در ناحیه منطقی تولید می‌باشد. معادله منحنی تولید همسان را برای تابع تولید (۴-۹۸) می‌توان استخراج نمود، بطوری که :

$$x_1 = \left[\frac{(y/A)^{-\rho} - (1-\delta)x_2^{-\rho}}{\delta}\right]^{-1/\rho} \qquad \text{(۴-۱۰۳)}$$

شکل محدب منحنی تولید همسان بوجود آمده بوسیله تابع تولید CES بسته به مقدار σ می‌باشد. دو حد و سه قضیهٔ حد فاصله زیر تمامی شکلهای ممکن منحنی‌های تولید همسان را توصیف می‌کنند.

قضیه ۱ ـ وقتی σ به سمت صفر و ρ به سمت مثبت بی‌نهایت میل می‌کند، اگر $x_2>x_1$ باشد RTS_{21} به صفر نزدیک می‌شود و اگر $x_2<x_1$ باشد به مثبت بی‌نهایت نزدیک می‌شود در اینجا، منحنی تولید همسان به حالت قائم الزاویه نزدیک می‌گردد.

قضیه ۲ ـ وقتی $0<\sigma<1$ و $\rho>0$ است، منحنی تولید همسان نه محور نهاده را قطع می‌کند و نه به آن نزدیک می‌شود، یعنی منحنی تولید همسان بطور مجانب است.

قضیه ۳ ـ وقتی $\sigma = 1$ و $\rho = 0$ است. تابع تولید CES وقتی $\sigma = 1$ باشد به تابع تولید کاب ـ داگلاس تبدیل می‌شود.

قضیه ۴ ـ وقتی $\sigma > 1$ و $0 > \rho > -1$، منحنی‌های تولید همسان با هر دو محور نهاده برخورد می‌کنند.

قضیه ۵ ـ وقتی σ به سمت مثبت بی‌نهایت و ρ به سمت منهای یک میل می‌کند منحنی‌های تولید همسان بصورت خطوط مستقیم می‌باشند. در اینجا نهاده‌ها بطور کامل جانشین همدیگر می‌گردند.

نرخ جانشینی فنی (RTS)

شیب منفی، منحنی تولید همسان در رابطه (۴-۱۰۳) ، بیان کننده نرخ جانشینی فنی بین دو نهاده X_1 و X_2 می‌باشد. که آنرا می‌توان بدست آورد، بطوری که :

$$RTS_{21} = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{MP_2}{MP_1} = \frac{\frac{1-\delta}{A^\rho}\left(\frac{y}{x_2}\right)^{1+\rho}}{\frac{\delta}{A^\rho}\left(\frac{y}{x_1}\right)^{1+\rho}} = \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1+\rho} \quad (۴-۱۰۴)$$

با بکارگیری شرایطی که $A>0$، $0 <\delta < 1$ و $-1 < \rho$ است، می‌توان ملاحظه نمود که :

$$\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1+\rho} > 0$$

بوسیله مشتق مرتبه دوم رابطه (۴-۱۰۴) ، می‌توان ثابت نمود که منحنی‌های تولید همسان، نسبت به مرکز مختصات محدب می‌باشند، این مسأله همچنین بیانگر این است که یک تابع CES، برای دامنه $x_1,x_2 > 0$ یک تابع منظم اکیداً شبه مقعر است.

خطوط شیب همسان

با مساوی قراردادن، RTS_{21} رابطه (۴-۱۰۴) با مقدار ثابتی مانند k و حل آن برای x_1 نسبت به x_2، معادله خط شیب همسان بدست می‌آید، بطوری که :

$$\frac{1-\delta}{\delta}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1+\rho} = k$$

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1+\rho} = \frac{k\delta}{1-\delta}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{k\delta}{1-\delta}\right)^{1/(1+\rho)}$$

$$x_1 = \left(\frac{k\delta}{1-\delta}\right)^{1/(1+\rho)} x_2 \qquad (۱۰۵-۴)$$

از رابطه (۴-۱۰۵) مشاهده می‌گردد خطوط شیب همسان، خطوطی مستقیم بوده و از مرکز مختصات عبور می‌کنند.

خطوط مرزی

معادلات خطوط مرزی برای تابع تولید CES رابطهٔ (۴-۹۸) عبارتند از :

$$RTS_{21} = 0 \quad \text{مربوط به} \quad x_1 = 0 \qquad (۱۰۶-۴)$$

و

$$RTS_{12} = 0 \quad \text{مربوط به} \quad x_2 = 0 \qquad (۱۰۷-۴)$$

بنابراین خطوط مرزی مربوط به روابط (۴-۱۰۶) و (۴-۱۰۷) ، در یک فضای دوبعدی مساوی با محورهای نهاده می‌باشند، چنانکه در حالت تابع تولید توان دار ملاحظه گردید.

کشش تولید

عبارات کششهای تولید نسبت به نهاده‌های X_1 و X_2 عبارتند از :

(۱۰۸-۴)

$$E_{p_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{x_1}{y} = \frac{\delta}{A^{\rho}}\left(\frac{y}{x_1}\right)^{\rho} \qquad (۱۰۹-۴)$$

از روابط مذکور ملاحظه می‌گردد که کششهای تولید ثابت نبوده و تابعی از سطوح نهاده مورد استفاده می‌باشند، در حالیکه سطح نهاده دیگر بدون تغییر است. همانند تخمین تولید نهائی، تخمین کشش تولید از تابع تولید CES نیز با مقادیر مثبت حاصل می‌گردد.

کشش جانشینی

چنانکه پیش از این نیز ذکر گردید، تابع CES بر محدودیت تابع توان‌دار بواسطه کشش جانشینی ثابت که لزوماً برابر با واحد نبود غلبه پیدا کرد. فقط در یک حالت خاص تابع تولید CES شبیه به تابع تولید کاب ـ داگلاس است، یعنی دارای کشش جانشینی ثابت برابر با واحد است و آن هم در جائی است که $\rho = 0$ می‌باشد. حال با علم به اینکه برای ترکیب کمترین هزینه x_1 و x_2 باید رابطه $\frac{MP_2}{MP_1} = \frac{P_2}{P_1}$ برقرار باشد، قصد داریم کشش جانشینی را از تابع تولید CES استخراج نمائیم.

بدین ترتیب نسبت عامل بهینه $\frac{x_1^*}{x_2}$، بدست می‌آید بوسیله :

$$\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1+\rho} = \frac{p_2}{p_1}$$

که اگر $\left(\frac{\partial}{1-\partial}\right)^{1/1+\rho}$ را با k نشان دهیم، خواهیم داشت :

$$\frac{x_1^*}{x_2^*} = k\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/(1+\rho)}$$

با گرفتن لگاریتم طبیعی از هر دو طرف رابطه، داریم :

$$\ln\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right) = \ln k + \frac{1}{1+\rho}\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

با استفاده از فرمول کشش جانشینی در این معادله، بدست می‌آوریم :

$$\sigma = \frac{d\left[\ln\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right)\right]}{d\left[\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right]} = \frac{1}{1+\rho} \qquad (۱۱۰-۴)$$

که σ، کشش جانشینی است و مقدار آن بسته به مقدار پارامتر ρاست، چنانکه در زیر داریم :

$$\left.\begin{array}{r} -1 < \rho < 0 \\ \rho = 0 \\ 0 < \rho < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sigma > 1 \\ \sigma = 1 \\ \sigma < 1 \end{array}\right. \qquad (۴-۱۱۱)$$

نتیجه بدست آمده در رابطه (۴-۱۱۰) را نیز بوسیله کاربرد فرمول کشش جانشینی زیر برای رابطه (۴-۱۰۴) می‌توان استنتاج کرد، که عبارتست از :

$$\frac{d\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{d\left(-\frac{dx_1}{dx_2}\right)} \quad \frac{-\frac{dx_1}{dx_2}}{\frac{x_1}{x_2}} = \frac{1}{1+\rho}$$

بنابراین، از رابطه (۴-۱۱۱) ملاحظه می‌گردد که کشش جانشینی متفاوت از صفر و واحد برای تابع تولید CES وجود دارد؛ هرچند آن مقدار کشش جانشینی در طول تمامی سطوح نهاده ثابت باقی می‌ماند. به دلیل مشکلات تخمین غیرخطی و ضرورت انتخاب یکی از چندین شکل CES، با توجه به مسأله تفکیک‌پذیری تبعی، این تابع قابلیت کاربرد عمومی اندکی دارد.

تابع تولید CES تعمیم‌یافته

دیدیم که تابع تولید CES یک تابع همگن از درجه یک تعریف گردید. بنابراین تابع مذکور را می‌توان به هر درجهٔ همگنی بسط داد. تابع تولید (۴-۹۸) را با استفاده از تبدیل یکنواخت مثبت می‌توان اینگونه نوشت، بطوری که :

$$Y = B[\delta x_1^{-\rho} + (1-\delta)x_2^{-\rho}]^{-k/\rho} \qquad (۴-۱۱۲)$$

در دامنه $x_1,x_2>0$، جائیکه β و δ و k مثبت می‌باشند، این تابع را همگن از درجه k می‌توان نشان داد، هنگامیکه منحنی‌های تولید همسان بواسطه این چنین تبدیلات تغییر نمی‌کنند. عبارات RTS و کشش جانشینی همچنان بدون تغییر باقی می‌مانند. اگر $k<1$ باشد، تابع تولید جدید اکیداً مقعر است.

۴-۱۰ تابع تولید ترانس لاگ (ترانس لگاریتمی)

محدودیتهای تابع تولید CES، مانند کشش جانشینی ثابت و محدودیت در کاربرد

عمومی این تابع، از جمله محدودیتهایی هستند که موجب گردیدند اشکال قابل انعطاف‌تری از تابع تولید توسعه یابند. تابع تولید ترانسن دنتال لگاریتمی که معروف به تابع تولید ترانس لاگ (ترانس لگاریتمی) است، یکی از جمله این اشکال تابع است. این تابع برای اولین بار توسط جریس‌تنسن[1]، چورگنسن[2] و لائو[3] در سال **۱۹۷۲** مطرح گردید. این شکل از تابع تولید در دوران اخیر نسبتاً سریع مورد علاقه و پسند اقتصاددانان قرار گرفت. چون این شکل از تابع یکی از چندین تعابیر ممکن و ساده ریاضی کاربرد تئوری دوگانگی شفارد[4] و توابع هزینه ترانس لاگ می‌باشد؛ گسترش تازه در استفاده از تئوری اقتصادسنجی و تجزیه و تحلیل **موضوعات** نظری در اندازه گیری جانشینی نهاده نیز تا اندازه‌ای گویای این معروفیت تابع تولید است.

تابع تولید ترانس لاگ را با n نهاده متغیر این گونه می‌توان نوشت :

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} \prod_{i=1}^{n} x_i^{1/2 \sum_{j=1}^{n} (b_{ij} \ln x_j)} \qquad (۱۱۳\text{-}۴)$$

که y ستاده، a_o پارامتر کارائی، x_i و x_j مقادیر نهاده i و j، $(i, j=1, 2, \ldots, n)$ و a_i و b_{ij} پارامترهای نامعلوم می‌باشند.

درست عین توابع تولید از نوع نمائی، این تابع نیز در اغلب مواقع بصورت لگاریتمی نوشته می‌شود.

$$\ln y = \ln a_0 + \sum_{i=1}^{n} (a_i \ln x_i) + \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (b_{ij} \ln x_i \ln x_j) \qquad (۱۱۴\text{-}۴)$$

به راحتی می‌توان مشاهده نمود که چطور رابطه (۴-۱۱۳) با گرفتن لگاریتم از دو طرف آن بصورت رابطه (۴-۱۱۴) نوشته می‌شود. معادله (۴-۱۱۴) در یک حالت خاص به تابع تولید کاب ـ داگلاس تبدیل می‌شود و این هم درجائی است که تمامی $b_{ij} = 0$ باشد. شکل تخمین این تابع تولید بصورت یک معادله ساده است :

$$\ln y_t = \ln a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \ln x_{it} + \sum_{i=1}^{n} c_{ii} (\ln x_{it})^2 + \sum_{i} \sum_{j} b_{ij} \ln x_{it} \ln x_{jt} + u_t \qquad (۱۱۵\text{-}۴)$$

1 . L.Christensen

2 . D.Jorgenson

3 . L.Lau

4 . Shephard's duality theory

که

$t = T\ ,\ ...\ ,\ 2\ ,\ 1$ تعداد مشاهدات

$u_t =$ جمله خطا تصادفی

$C_{ii} = b_{ij}\frac{1}{2}$ از رابطه (۴-۱۱۴)

$C_{ij} = (i \neq j)\quad 1, 2, ..., n$

بنابراین، دو مشکل برای تخمین وجود دارد که در حالت‌های زیر خودشان را به سرعت نشان می‌دهند. اولاً ، چنانچه تعداد نهاده‌ها افزایش یابد، تعداد پارامترهاتی مورد تخمین سریعاً افزایش می‌یابند، ثانیاً، جملات مربوط به مربعات و حاصل ضربهای برداری متغیرهای نهاده‌ای، **مسأله جدی هم خطی مرکب را به وجود می‌آورند.**

حذف جمله‌های مربع و جمله‌های حاصل ضربی **که** نسبتهای t مربوط به آنها معنی‌دار نیست[1] یا کمتر از مقدار معین بحرانی[2] است، یا اصلاح شکل تبعی معادله، بوسیله حذف جملات مربع، می‌تواند برای گریز از این مشکل راه‌حلی باشد. هرچند این چنین راه‌حلهای ممکن است، موجب از بین رفتن انعطاف‌پذیری روابط گردند. بالاتر از همه اینکه، هیچگونه استدلال اقتصادی برای حذف اینگونه عبارات مربع از تابع تولید وجود ندارد.

تولیدنهائی (MP_i)

تولید نهائی نسبت به نهاده i را از رابطه (۴-۱۱۴) می‌توان بدست آورد، بطوری که

$$MP_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln x_i}(y/x_i) = \left(a_i + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\ \ln x_j\right)(y/x_i) \qquad (۴\text{-}۱۱۶)$$

از رابطه (۴-۱۱۶) ملاحظه می‌گردد که برای سطوح محدود نهاده X_i، MP_i برای دامنه ارزش X_j می‌تواند مثبت باشد. اما اگر $b_{ij}>0$ (برای تمامی i, j ها) و $x_j \to 0$ باشد، MP_i منفی است؛ به همین نحو، اگر $b_{ij}<0$ باشد، MP_i کوچکتر از یک است و سپس چنانچه x_j به

1 . Non - Significant

2 . Blow certain critical value

سمت بی‌نهایت میل کند، $MP_i<0$ است. بنابراین از آنجائیکه یکنواختی مستلزم آن است که برای همه i ها ، $MP_i>0$ باشد، تابع ترانس لاگ بطور سراسری، خوش‌رفتار نخواهد بود. این مسأله، برای تابع تولید ترانس لاگ یک محدودیت به شمار می‌رود.

کشش تولید

از تابع تولید ترانس لاگ (۴-۱۱۴) ، کشش تولید نسبت به نهاده X_i بدست می‌آید، بطوری که :

$$E_{p_i} = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln x_i} = a_i + \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \ln x_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \qquad (۴-۱۱۷)$$

بدین ترتیب، از رابطه (۴-۱۱۷) مشاهده می‌گردد که کشش تولید نسبت به نهاده i ، ثابت نیست بلکه تابعی از سطح نهاده j است $(J = 1, 2, \ldots, n)$

بازده‌های نسبت به مقیاس

برای یک تابع تولید همگن، صرفه‌جوئیهای مقیاس[1] می‌تواند کمتر، برابر یا بزرگتر از واحد باشد. اما برای هر تابعی داده شده، بازده‌های نسبت به مقیاس، در مورد مقادیر اولیه نهاده‌ها، یکسان است و برابر است با مجموع کششهای تولید. فریش و فرگوسن ثابت نمودند که حتی برای توابع غیرهمگن، بازده‌های نسبت به مقیاس، برابر با مجموع کششهای تولید مربوط به نهاده‌های مختلف است. بدین ترتیب برای تابع تولید ترانس لاگ که یک تابع تولید غیرهمگن است، بازده‌های نسبت به مقیاس (ضریب تابع)[2] نسبت به سطوح نهاده ثابت نیستند. ضریب تابع از رابطه (۴-۱۱۴) ارائه شده بوسیله :

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} E_{p_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \ln x_j \qquad (۴-۱۱۸)$$

رابطه (۴-۱۱۸) برای کار با توابع غیرهمگن می‌تواند مفید باشد. به هر حال، این مسأله مطرح می‌گردد که تحت شرط کافی، تابع ترانس لاگ همگن خواهد بود. این شرط کافی عبارتست از :

---

1 . Scale Fconomies

2 . Function coefficient

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 0 \qquad (۱۱۹-۴)$$

بنابراین، وقتی مجموع ردیف و ستون ضرائب در جمع عبارات درجه دوم صفر باشد، شرط کافی برای همگنی تابع ترانس لاگ فراهم می‌گردد. بدین ترتیب، درجه همگنی مثلاً h برای رابطه (۴-۱۱۴) در زیر نشان داده شده است.

$$h = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad (۱۲۰-۴)$$

حال ملاحظه می‌گردد که اگر رابطه (۴-۱۱۹) پابرجا باشد، عبارت جمع دوبل در داخل پرانتز در رابطه (۴-۱۱۸) حذف و صرفه‌جوئیهای نسبت به مقیاس از سطوح نهاده مستقل می‌گردند. در این حالت این شبیه تابع تولید کاب ـ داگلاس خواهد بود، به استثناء اینکه در تابع ترانس لاگ ضرائب کشش تولید نهاده‌ای با سطوح نهاده تغییر می‌کنند.

تمریـــــن

۴-۱ در تابع تولید داده شده:

$$y = 15 + 0.5\,x$$

y و x به ترتیب مقادیر ستاده و نهاده بر حسب کنتال[1] و کیلوگرم در هر هکتار می‌باشند.

(۱) نمودار این تابع تولید را رسم کنید.

(۲) مفهوم مقدار عرض از مبدأ راتوضیح دهید.

(۳) تولید متوسط (AP) و تولید نهائی (MP) را بدست آورید. آیا مقادیر آنها تابعی از سطح نهاده می‌باشند؟ منحنی‌های تولید متوسط و نهایی را بر روی یک نمودار رسم نمائید. چند منحنی وجود دارد، یک یا دو تا؟

(۴) کشش تولید را از تابع تولید بدست آورید

(۵) اگر P_y (قیمت هر واحد y) رقم مثبتی باشد، چه مقدار y باید تولید شود؟ آیا

---

۱. کنتال واحد وزنی معادل ۱۰۰ کیلوگرم است.

تفاوت در قیمت هر واحد X، یعنی P_x، نتیجه را متفاوت می‌سازد؟

۴-۲ آیا تابع تولید بصورت خطی برای تجزیه و تحلیل اقتصادی مناسب می‌باشد؟ آیا این گونه توابع دارای فروض متداول برای تجزیه وتحلیل تابعی می‌باشند؟

۴-۳ تابع تولید زیر با دو نهاده X_1 و X_2 مفروض است.

$$y = 10x_1 + 20x_2$$

(۱) معادله منحنی تولید همسان را بدست آورید؛ آن را بر روی نمودار رسم کنید، چه مواقعی این چنین منحنی‌های تولید همسان را توقع دارید؟

(۲) چه مطالبی درباره RTS_{12} منحنی تولید همسان این تابع می‌توان بیان کرد

(۳) بازده‌های نسبت به مقیاس این تابع تولید را بدست آورید

(۴) اگر قیمت‌های X_1 و X_2 مشخص بودند، چه توصیه‌ای درباره استفاده از مقادیر X_1 و X_2 داشتید.

(۵) نقشه منحنی تولید همسان را چنان رسم کنید که نوع بازده‌های نسبت به مقیاس را برای این تابع تولید مشخص سازد

۴-۴ تابع واکنش نیتروژن در زیر داده شده است :

$$y = 2500 + 12n - 0.03n^2$$

که y تولید ذرت بر حسب کیلوگرم در هکتار و n ماده غذائی نیتروژن بر حسب کیلوگرم در هکتار می‌باشد، موارد زیر را پیدا کنید:

(۱) تولید متوسط را از قرار $n = 50$, $n = 120$

(۲) تولید نهایی را از قرار $n = 100$, $n = 120$

(۳) VMP (ارزش بازده نهائی)، از قرار $n = 0$، همچنین اگر P_n (قیمت هر واحد کود نیتروژن)، ۴/۵۰ روپیه در هر کیلوگرم باشد.

(۴) کشش تولید n را از قرار $n = 120$، کشش تولید دلالت بر چه چیزی دارد؟

۴-۵ تابع واکنش فسفر برای بادام زمینی بر حسب هر هکتار در زیر مفروض است :

$$y = 1800 + 12\ P - 0.10\ P^2$$

که y مقدار بادام زمینی بر حسب کیلوگرم در هکتار و P مقدار P_2O_5 بر حسب کیلوگرم در هر هکتار می‌باشد.

(۱) آن سطحی از P که در آن y حداکثر می‌گردد را بدست آوردید.

(۲) حداکثر سطح قابل حصول y چه مقدار است

(۳) در چه سطحی از P و y، AP و MP در سطح حداکثر خود می‌باشند.

(۴) در چه سطحی از نهاده و ستاده، $MP = AP$ می‌باشد.

(۵) آن مقادیری از P و y را بدست آورید که برای آنها، کارآیی فنی نسبت به نهاده متغیر P و نسبت به نهاده ثابت زمین حداکثر می‌باشد، چه استنباطی از نتایج دارید؟

(٦) چه مقدار از P باید مورد استفاده قرار گیرد اگر این نهاده از هزینه معاف و y قیمت مثبت مربوط به آن باشد.

۴-۶ تابع واکنش نیتروژن ـ فسفر برای تولید ذرت داده شده است :

$$y = 2000 + 10n + 2p - 0.02n^2 - 0.001\,p^2 + 0.30np$$

که y کیلوگرم ذرت در هر هکتار و n و p کیلوگرم نیتروژن و فسفر در هکتار می‌باشند.

(۱) معادله منحنی تولید همسان را از روی تابع واکنش مذکور بدست آورید.

(۲) منحنی‌های تولید همسان مربوط به معادله منحنی تولید همسان را برای y=۲۵۰۰ کیلوگرم و y=۳۰۰۰ کیلوگرم رسم نمائید.

(۳) چگونه می‌توانید آن قسمت از یک منحنی تولید همسان معین را که از نظر اقتصادی معنی‌دار و مناسب است، پیدا کنید؟

(۴) RTS_{12} را بر حسب $n =$ ۱۰۰ و $P =$ ۵۰ بر روی منحنی تولید همسان با y=۲۵۰۰ کیلوگرم بدست آورید.

۴-۷ عبارت بازده نسبت به مقیاس تابع زیر را بدست آورید.

$$y = a_o + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{12}x_{12}$$

که y مقدار ستاده و x_1، x_2 مقادیر نهاده X_1 و X_2 می‌باشند. همچنین a_{11} و a_{22} کوچکتر از صفر و دیگر ضرائب بزرگتر از صفر می‌باشند. چه نوع بازده نسبت به مقیاس را انتظار دارید؟ آیا این بازده نسبت مقیاس اقتصادی یا طبیعی است؟

۴-۸ برای معادله y در تمرین (۴-۴) بر روی نقشه منحنی تولید همسان، خطوط شیب همسان مربوط به آن معادله واکنش را رسم کنید.

۴-۹ چه نتیجه‌ای درباره نوع بازده‌های نسبت مقیاس بدست آمده از نقشه منحنی‌های تولید همسان مربوط به معادله واکنش تمرین (۴-۴) می‌توان گرفت.

۴-۱۰ برای تابع تولید لجستیک :

$$y = \frac{a_0}{1 + a_1 e^{-a_2 x_1}}$$

که y و x_1 سطوح ستاده Y و نهاده X_1 می‌باشند، ثابت کنید که در $x_1 = a_1^{-1} a_2^{-2}(a_1 + e^{a_2 x_1})$، کشش تولید نهاده X_1 یعنی EP_1 برابر با واحد است.

۴-۱۱ تابع تولید زیر داده شده است

$$y = 20.5 x_1^{0.4} \,.\, x_2^{0.35}\, x_3^{0.25} \,.\, x_4^{0.5}$$

که x_1، x_2، x_3 و x_4 به ترتیب عبارتند از هکتار زمین، نیروی کار روزمزد، مخارج کود دادن، کود، حشره کش‌ها، مواد ضدآفت، تعمیر و نگهداری لوازم و ماشین‌آلات و غیرو بر حسب روپیه و نیروی کارگاو نر (بطور روزانه). y عبارتست از محصول غله بر حسب کنتال در هر هکتار؛ از این تابع تولید مطلوبست :

(۱) مشتقات مرتبه اول و دوم نسبت به x_1، آیا این مشتقات وجود دارند؟

(۲) عبارت MP_i را بدست آورید. مقدار VMP_i به ازا $x_1 = 5$ هکتار، $y = 30$ کنتال در هر هکتار و $P_y = 300$ روپیه برای هر واحد محصول چقدر است؟

(۳) ضریب ثابت 20.5 در این مورد چه مفهومی دارد؟ اگر این ضریب به ۴۰/۶ تغییر یابد و تمامی ضرائب متغیرهای دیگر بدون تغییر باقی بمانند، این تغییر چه مفهومی دارد؟

(۴) ضرائب کشش تولید را نسبت به هر نهاده متغیر یعنی EP_i بدست آورید؛ این ضرائب را تفسیر می‌کند.

(۵) بازده‌های نسبت به مقیاس را برآورد کنید، آیا بازده‌های نسبت به مقیاس اقتصادی یا طبیعی می‌باشند؟ اگر این چنین است، چرا؟

(٦) کشش جانشینی را بین x_1 و x_2 محاسبه کنید. آیا این برآورد بین x_2 و x_3 یا x_2 و x_4 وجود دارد.

۴-۱۲ یک تابع توان دار با استفاده از تبدیل لگاریتمی برای متغیرها تخمین زده شده است و بدین ترتیب بصورت یک تابع خطی مناسب تبدیل گردیده است. آیا اهمیت داشت اگر از لگاریتم طبیعی یا معمولی استفاده می‌گردید؟

۴-۱۳ مؤلفی مقاله‌ای را به منظور چاپ برای یک مجله تحقیقی ارسال داشته است. این مقاله شامل تابع تولیدی این چنین بود:

$$y = 10x_1^{0.5}x_2^{0.3}x_3^{1.4}$$

که y مقدار ستاده بر حسب کنتال و x_1، x_2 و x_3 عبارتند از نیروی کار روزمزد، سرمایه به کار رفته بر حسب روپیه و نیروی کار گاو نر بر حسب روزانه، که تمامی آن نهاده‌ها برای یک واحد جریب فرنگی[1] در نظر گرفته شده‌اند. سردبیر مجله می‌گوید مؤلف تابع تولید را بر حسب هکتار بدست آورده است. حال روش رسیدن به این هدف را بدون برازش مجدد تابع تولید بر حسب هکتار توضیح دهید. همچنین اگر آن مطلبی که سردبیر مجله می‌گوید اتفاق افتاده باشد، آیا تغییری در ضرائب کشش تولید RTS_{ij} و سطوح بهینه نهاده صورت می‌گیرد.

۴-۱۴ چگونگی تخمین یک تابع توان دار را با استفاده از اطلاعات یک مزرعه نمونه در حالتی که دارای بازده نسبت به مقیاس منحصراً واحد است، مختصراً توضیح دهید. آیا سهم نسبی عوامل را بوسیله این شیوه می‌توان بررسی نمود؟

۴-۱۵ یک تابع تولید توان‌دار برازش شده با استفاده از اطلاعات بدست آمده از یک مزرعه نمونه چنین است:

$$y = 10x_1^{0.1}x_2^{0.4}x_3^{0.2}x_4^{0.08}$$

که y مقدار ستاده در هکتار بر حسب کنتال و x_1 مقدار نهاده زمین بر حسب هکتار، x_2، x_3 و x_4 به ترتیب عبارتند از نهاده نیروی کار، سرمایه بکار رفته و نیروی گاو نر، که تمامی

---

۱. *acre* واحد اندازه‌گیری سطح، برابر با ۴۰۴۷ متر مربع (م)

آنها بر حسب هکتار می‌باشند. حال به سؤالات زیر در زمینه این تابع پاسخ دهید.

(۱) بازده نسبت به مقیاس را بدست آورید. چگونگی استخراج آنرا توضیح دهید. روش بررسی نرخ بازده‌ها را از تابع کاب ـ داگلاس توضیح دهید.

(۲) عبارت MP_1 را نشان دهید. آیا شبیه به فرمولهای معمولی است؟

(۳) معادله‌ای را برای تخمین RTS_{ij} ، $j \neq i$ $i, j = 2,3,4$ بنویسید.

(۴) خطرات احتمالی هنگام استفاده از متغیرها با توجه به ترکیب ارائه شده در این تابع تولید بر حسب برآوردهای MP_1 و RTS_{ij} $(i \neq j)$ چیست؟

۴-۱۶ یک محقق با استفاده از داده‌های مقطعی یک نمونه تصادفی از مزارع، تابع تولید کاب داگلاس را برای آن مزارع برازش نموده، که تابع بدست آمده چنین است:

$$y = 15x_1^{-0.2}x_2^{0.9}x_3^{0.08}$$

که y مقدار ستاده هر واحد مزرعه بر حسب روپیه، x_1، x_2 و x_3 مقدار زمین بر حسب هکتار، نیروی انسانی روزمزد و نهاده سرمایه بکار رفته بر حسب روپیه در هر مزرعه می‌باشد. مطلوبست:

(۱) ضریب منفی مربوط به نهاده زمین را چگونه تفسیر می‌کنید؟ بطور مفصل پاسخ دهید.

(۲) آیا برآورد ضریب مربوط به زمین اشتباه است؟ توضیح دهید.

۴-۱۷ ثابت کنید که تابع CES همگن از درجه یک است. در تجزیه و تحلیل اقتصادی این موضوع چه مفهومی دارد؟

۴-۱۸ در تابع تولید CES، ثابت کنید که $\sigma = \frac{1}{1+\rho}$ است؛ بطوری که σ عبارتست از کشش جانشینی و ρ پارامتر جانشینی است، چنانکه $0<\sigma<\infty$ است.

۴-۱۹ ثابت کنید چنانکه در حد ρ به سمت صفر میل کند، تابع تولید CES به تابع تولید کاب ـ داگلاس تبدیل می‌گردد.

۴-۲۰ نمودار مربوط به معادله تولید متوسط رابطه (۴-۱۰۰) را رسم نمائید، از شکل این منحنی چه نتیجه‌ای حاصل می‌گردد؟

منابع برای مطالعه بیشتر

Arrow, K.J. *et al.*, "Capital and Labour Substitution and Economic Efficiency", *Review of Economics and Statistics*, **43**, 1961, pp 225–250.

Balmukand, B., "Studies in Crop Variation v. The Relation between Yield and Soil Nutrients", *Journal of Agricultural Science*, **18**, 1928, pp 602–627.

Boisvert, Richard N., *The Translog Production Function: Its Properties, Its Several Interpretations and Estimation Problems*, Cornell University, Ithaca (New York), 1982.

Bronfenbrenner, M., "Production Functions: Cobb-Douglas Interfirm, Intrafirm", *Econometrica*, **12**, 1944, pp 35–40.

Bronfenbrenner, M. and Douglas, Paul H., "Cross-Section Studies in the Cobb-Douglas Function", *Journal of Political Economy*, **47**, 1939, pp 761–785.

Chiang, Alpha C., *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, McGraw-Hill, New York, 1967.

Christensen, L., D. Jorgenson, and L. Lau, "Conjugate Duality and Transcendental Logarithmic Production Frontiers", University of Wisconsin, 1972.

———, "Transcendental Logarithmic Production Frontiers", *Review of Economics and Statistics*, **54**(1), 1973, pp 28–45.

Cobb, Charles W. and Douglas, Paul H., "A Theory of Production", *American Economic Review*, **18**, 1928, pp 139–165.

Dillon, J.L., *The Analysis of Response in Crop and Livestock Production*, 2nd ed., Pergamon Press, Oxford, 1977, Ch. 1.

Douglas, P.H., "Cobb-Douglas Production Function Once Again: Its History, Its Testing and Some New Empirical Values", *Journal of Political Economy*, **84**(5), 1976, pp 903–915.

Ferguson, C.E., *The Neoclassical Theory of Production and Distribution* Cambridge University Press, London, 1969, Ch. 4.

Frisch, R., *Theory of Production*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht (Holland), 1965, Ch. 5.

Halter, A.N., H.O. Carter and J.G. Hocking, "A Note on the Transcendental Production Function", *Journal of Farm Economics*, **39**, 1957, pp 966–974.

Heady, Earl O., "Production Functions from a Random Sample of Farms", *Journal of Farm Economics*, **28**, 1946, pp 989–1004.

Heady, E.O. and J.L. Dillon, *Agricultural Production Functions*, Iowa State University Press, Ames, Iowa, 1961, Ch. 3.

Kmenta, J., "On Estimation of the CES Production Function", *International Economic Review*, **8**, 1967, pp 180–189.

Menderhansen, Horst, "On the Significance of Professor Douglas's Production Function", *Econometrica*, **6**, 1938, pp 143–153.

Nerlove, M., *Estimation and Identification of Cobb-Douglas Production Functions*, Rand McNally and Company, Chicago, 1965.

Reder, M.W., "An Alternative Interpretation of the Cobb-Douglas Production Function", *Econometrica*, **11**, 1943, pp 259–264.

Revankar, N.S., "A Class of Variable Elasticity of Substitution Production Functions", *Econometrica*, **39**(1), 1971, pp 61–71.

Sato, R. and R.F. Hoffman, "Production Functions with Variable Elasticity of Factor Substitution: Some Analysis and Testing", *Review of Economics and Statistics*, **50**(4), 1968, pp 453–460.

Spillman, W.J., "Application of the Law of Diminishing Returns to Some Fertilizer and Feed Data", *Journal of Farm Economics*, **5**, 1923, pp 36–52.

Ulveling, E.F. and L.B. Fletcher, "A Cobb-Douglas Production Function with Variable Returns to Scale", *American Journal of Agricultural Economics*, **52**(2), 1970, pp 322–326.

Uzawa, H., "Production Function with Constant Elasticities of Substitution", *Review of Economic Studies*, **29**, 1962, pp 291–299.

Zellner, A. and N. Revankar, "Generalized Production Functions", *Review of Economic Studies*, **36**, 1969, pp 241–250.

فصل پنجم

تـابــع ســـود

با توسعه تئوری دوگانه درباره توابع تولید، سود و هزینه، روشهای بسیار مؤثری در اقتصادسنجی کاربردی در مورد اقتصاد تولید پدیدار گشت. توسعه این تئوری نسبتاً یک اصل تازه بود؛ هرچند بعضی از اقتصاددانان این تکنیک را برای تجزیه و تحلیل اقتصادی بطور مفید مورد استفاده قرار دادند، ولی اقتصاددانان کشاورزی نسبت به این تکنیک عکس‌العمل مطلوبی از خود نشان ندادند. البته این مایه تأسف بود، چون کاربرد تئوری دوگانه به فراهم نمودن خصوصیات گسترده‌تر روابط تولید توابع عمومی مرسوم، مانند توابع کاب ـ داگلاس و CES کمک می‌کند. شاید پذیرش نسبتاً تدریجی کاربرد مفید این تئوری بـواسـطه زبـان ریاضی نسبتاً مشکل آن است. بنابراین، اقتصاددانان کشاورزی دریافتند که استفاده از فواید کاربرد عملی این پیشرفتها بسیار دشوار است.

یک تابع سود (یا هزینه) بیانگر رابطه حداکثر سود (یا حداقل هزینه) است با قیمتهای محصول (ها) و نهاده (ها) ؛ همچنین، رابطه آن را با متغیرهای برون‌زا، مثل نهاده‌های ثابت، شرایط اقلیمی و عوامل اجتماعی نیز نشان می‌دهد. پارامترهای یک تابع سود شامل تمامی اطلاعات موجود در تابع تولید است. تحت شرایط معین، یک تابع سود یا هزینه بطور بی‌نظیر با تابع تولید داده شده مطابقت دارد. بنابراین، معمولاً برای مدل‌سازی بهتر است از تابع سود شروع کنید، بدون هیچ نگرانی درباره شکل تبعی خاص تابع تولید مربوط. این مسأله تقریباً مشابه با برنامه‌ریزی خطی است، جایی که فرمول‌بندی اولیه و فرمول‌بندی ثانویه یک مسأله دارای تناظر یک به یک می‌باشند. لذا این امکان وجود دارد که برای حل یک مسأله، از مسأله اولیه یا مسأله ثانویه استفاده نمود. در حل مسأله برنامه‌ریزی خطی اغلب این شـیوه مـورد

استفاده قرار می‌گیرد، یعنی حل مسأله اولیه بوسیله حل مسأله ثانویه آن.

مزایای تئوری دوگانه[1]

بعضی از فواید استفاده از تئوری دوگانه بین توابع تولید و سود عبارتند از :

۱ـ محقق نیاز به فکر کردن درباره شکل تبعی خاص تابع تولید ندارد.

۲ـ در روش تابع تولید معمولی، ستاده y بصورت درون‌زا و سطوح نهاده‌های X_i بصورت برون‌زا مورد بررسی قرار می‌گیرند. بعبارت دیگر، فقط متغیرهای برون‌زا هستند که بصورت متغیرهای مستقل در معادله رگرسیون ظاهر می‌شوند. به واقع، در هر حالت، X_i ها بطور همزمان بوسیله قیمت نهاده‌ها تعیین می‌گردند. بنابراین به جای یک مدل ساده معادله، یک سیستم معادلات همزمان[2] برای بررسی پدیده اقتصاد واقعی دارای دقت بیشتری است، روش تابع سود مؤید این اصلاح و ترقی است. از طرف دیگر در روش تخمین تابع تولید، مقادیر سمت راست معادله فقط شامل متغیرهای مستقل نمی‌گردد، بلکه شامل متغیرهای وابسته بسیاری نیز می‌باشد؛ مانند نهاده‌های کود، آبیاری و کارگر که همراه با ستاده بوسیله تصمیم‌گیرنده تعیین می‌گردند. لذا در این شیوه محاسبه توابع تولید، این‌گونه عناصر، جزء ویژگیهای نامطلوب محسوب می‌گردند. لکن تا وقتیکه این امکان وجود دارد که تمامی نهاده‌ها را به ثابت و متغیر دسته‌بندی نمائیم، این ویژگی نامطلوب با توابع سود تغییر نمی‌کنند.

۳ـ بعضی از متغیرهای نهاده توضیحی ممکن است دارای همبستگی شدید باشند، که علت آن، وجود مسأله همبستگی چند جانبه[3] در تخمین تابع تولید است. البته وقتی دستیابی به تابع سود با استفاده از قیمتهای نهاده متغیرهای توضیحی (برون‌زا) صورت می‌گیرد این مسأله چندان مهمی نیست چراکه همبستگی شدید در بین این متغیرها معمولاً بصورت نادر صورت می‌گیرد.

۴ـ استخراج توابع تقاضای نهاده و عرضه محصول از تابع تولید برازش شده اغلب نسبتاً مشکل است. بر عکس با استفاده از لم شفارد[4] در روش تابع سود دستیابی به این چنین تخمینهای نسبتاً به آسانی صورت می‌گیرد، برای مثال در زیر، مشتقات جزئی مرتبه اول سود

---

1 . *Usefulness of the theory of duality*

2 . *A system of equations approximates*

3 . *Multicolllineartiy*

4 . *Shephard's lemma*

نرمال شده[1] π^* نسبت به P_i، قیمت نرمال شده متغیر نهاده X_i، یعنی معادله تقاضای عامل را به دست می‌دهد (نسبت به این نهاده)

$$-\frac{\partial \pi^*}{\partial p_i} = x_i^* \qquad (۵-۱)$$

که x^*_i گویای مقدار بهینه نهاده متغیر X_i است.

وقتی توابع هزینه در حالت خاص توابع سود، می‌توانند مورد توجه قرار بگیرند که ستاده به عنوان یک متغیر توضیحی در میان نهاده محسوب گردد. باید توجه داشت که در این مرحله، روش تابع سود همیشه بر روش تابع هزینه مربوط به آن، مرجح است، زیرا در روش اخیر، متغیرهای درونزا و برونزا با هم آمیخته می‌شوند.

۵-۲ استخراج تابع سود از تابع تولید

فرض کنید یک تابع تولید با m نهاده متغیر $X_1 , X_2 , ... , X_n$ و n نهاده ثابت $Z_1, Z_2 , ... , Z_m$ نسبت به ستاده Y داریم، مانند :

$$y = f(x_1, x_2, . . . , x_m; z_1, z_2, . . ., z_n) \qquad (۵-۲)$$

هزینه فرصت نهاده‌های ثابت در کوتاه مدت برابر با صفر است. بنابراین تولید کننده فقط نیاز به حداکثر نمودن بازده نسبت به نهاده‌های ثابت را دارد. یعنی قیمت واقعی فروش ستاده منهای هزینه نهاده‌های متغیر، که موسوم به هزینه‌های متغیر می‌باشند. نتیجه بازده نهاده‌های ثابت راکه موسوم به سود متغیر (π') است برای تابع تولید داده شده بوسیله (۵-۲) را می‌توان این‌گونه نوشت :

$$\pi' = p_y f(x_1, x_2, . . ., x_m; z_1, z_2, . . ., z_n) - \sum_{i=1}^{m} p_i x_i \qquad (۵-۳)$$

که P_y قیمت ستاده و P_i قیمت هر واحد نهاده متغیر i $(i = 1 , 2 , ... , m)$ می‌باشند.

---

1 . Normalized profit

برای حداکثرنمودن π' درکوتاه مدت، مشتقات جزئی مرتبه اول را نسبت به نهاده‌های متغیر گرفته و سپس آنها را مساوی با صفر قرار می‌دهیم. بدین ترتیب مشتقات جزئی بدست آمده از رابطه (۵-۳) مساوی صفر قرار داده شده و نشان داده می‌شوند بوسیله :

$$\frac{\partial \pi'}{\partial x_i} = p_y f_i = p_i \qquad (۵-۴)$$

که f_i دلالت بر مشتقات جزئی مرتبه اول نسبت به نهاده i دارد. وقتی رابطه (۵-۲) ، $f(x_1 , x_2 , \dots , x_m , z_1 , z_2 , \dots , z_n)$، مساوی با y باشد، رابطه (۵-۴) را این‌گونه می‌توان نوشت :

$$p_y \frac{\partial y}{\partial x_i} = p_i \quad \text{or} \quad \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{p_i}{p_y}, \qquad i = 1, 2, \dots, m \qquad (۵-۵)$$

بدین ترتیب در اینجا m معادله همزمان با m مجهول وجود دارد، که بوسیله حل آن می‌توان مقادیر بهینه نهاده x_i^*، $i = 1,2 , \dots , m$ راکه بوسیله :

$$x_i^* = x_i^*(p_y, p_1, p_2, \dots, p_m; z_1, z_2, \dots, z_n), \quad i = 1, 2, \dots, m \qquad (۵-۶)$$

بیان شده است، بدست آورد. رابطه (۵-۶) ، تابع تقاضا برای نهادهٔ متغیر i را نشان می‌دهد. با جانشین نمودن توابع تقاضا داده شده بوسیله (۵-۶) در رابطه (۵-۳) بدست می‌آوریم.

$$\pi'^* = p_y f(x_1^*, x_2^*, \dots x_m^*; z_1, z_2, \dots, z_n) - \sum_{i=1}^{m} p_i x_i^* \qquad (۵-۷)$$

که x_i^* $(i = 1, 2, \dots , m)$ مقدار بهینه نهاده متغیر i می‌باشد و π'^* مطابق با حداکثر مبلغ سودمتغیر است. بدیهی است که بدین ترتیب، π'^* در رابطه (۵-۷) بیان کننده تابع قیمتهای ستاده و نهاده‌های متغیر و مقادیر نهاده ثابت است. بنابراین برای تابع سود داریم :

$$\pi'^* = \pi'^* (p_y, p_1, p_2, \dots, p_m; z_1, z_2, \dots, z_n) \qquad (۵-۸)$$

محققان شکل اصلاح شده این تابع را توسعه دادند، که به تابع سود نرمال شده موسوم

است و از نقطه‌نظر اقتصادسنجی ثابت گردیده که استفاده از این تابع آسانتر می‌باشد. دلیل این مطلب از اینجا ناشی می‌گردد که این شکل از تابع سود تعداد متغیرهای توضیحی را تا حد یک متغیر کاهش داده و دامنه انتخاب را برای شکل تابعی گسترش می‌دهد. یعنی هنگام استفاده از تابع سود نرمال شده، مجبور نیستیم که دامنه انتخاب را فقط به شکلهای تابعی که همگن از درجه یک است محدود سازیم.

۵-۳ تابع سود نرمال شده

اگر هر دو طرف رابطه (۵-۳) بر یک مقدار ثابت تقسیم گردد، سطوح حداکثر شده سود نهاده‌های متغیر (x_i^*) بدون تغییر باقی می‌مانند. تقسیم طرفین معادله بوسیله مقدار ثابتی صورت می‌گیرد که در اینجا قیمت ستاده، P_y مورد نظر است. بدین ترتیب رابطه (۵-۳) تغییر شکل داده بطوریکه :

$$\frac{\pi'}{p_y} = \pi = f(x_1, x_2, \ldots, x_m; z_1, z_2, \ldots, z_n) - \frac{1}{p_y}\sum_{i=1}^{m} p_i x_i \quad (۵\text{-}۹)$$

اگر r_i جانشین $\frac{p_i}{p_y}$، $i = 1, 2, \ldots, m$ گردد. بدین ترتیب رابطه (۵-۹) را می‌توان این چنین نوشت :

$$\frac{\pi'}{p_y} = \pi = f(x_1, x_2, \ldots, x_m; z_1, z_2, \ldots, z_n) - \sum_{i=1}^{m} r_i x_i \quad (۵\text{-}۱۰)$$

توجه کنید که π در روابط (۵-۹) و (۵-۱۰) سود نرمال شده است، که مربوط به قیمتهای نسبی نهاده می‌باشد بر خلاف تابع سودی که مربوط به قیمتهای واقعی نهاده و قیمت ستاده است. استخراج معادلات تقاضای نهاده متغیر (۵-۶) از رابطه (۵-۳) یک الگوی مشابه با همین شیوه است. بطوریکه معادلات تقاضای عامل متغیر را از رابطه (۵-۱۰) نیز می‌توان بدست آورد، که در این روش نیز قیمتهای نسبی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. این چنین معادلات تقاضا وقتی در رابطه (۵-۱۰) جانشین می‌گردند، تابع سود نرمال شده بدست می‌آید.

$$\pi^* = \pi^*(r_1, r_2, \ldots, r_m; z_1, z_2, \ldots, z_n) \quad (۵\text{-}۱۱)$$

۵-۴ استخراج توابع عرضه ستاده و تقاضای عامل از تابع سود

قبلاً فواید روش تابع سود را متذکر شدیم. این برتری برای استخراج توابع عرضه محصول و تقاضای نهاده از تابع سود، بواسطه لم شفارد و یا لم هوتلینگ[1] به خوبی پابرجاست.

حالتهای لم شفارد که یکی از آنها رابطه (۵-۱۲) می‌باشد و آن را از رابطه (۵-۱۱) می‌توان بدست آورد.

$$-\frac{\partial \pi^*}{\partial r_i} = x_i^* = x_i^*(r_1, r_2, \ldots, r_m; z_1, z_2, \ldots, z_n) \qquad (۱۲\text{-}۵)$$
$$i = 1, 2, \ldots, m$$

مفهوم عبارت (۵-۱۲) بدین معنی است که منفی بودن مشتق جزئی مرتبه اول تابع سود نرمال شده نسبت به قیمتهای نسبی یا نرمال شده، گویای مقدار بهینه عامل یا منحنی تقاضای نهاده است. شاید خواننده این مسأله مهم را دریابد که در مقایسه با فرایند پیچیده حل سیستم معادلات همزمان در روش تابع تولید، استخراج معادله تقاضای نهاده بطور مستقیم از تابع سود صورت می‌گیرد. وقتی شکل تابعی خاص، تابع نرمال شده مورد نظر است، امکان تخمین و استخراج رابطه (۵-۱۲) از آن یا تخمین بطور مستقیم رابطه (۵-۱۲) وجود دارد. استفاده از روش تابع تولید، هنگامیکه آن توابع نسبت به شکلهای معمول مانند کاب ـ داگلاس و CES پیچیده‌تر باشند قادر نیست شکل شبیه به عبارات معادلات تقاضای عوامل راایجاد نماید. البته این معضل حتی وقتی شکل پیچیده تابع سود نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد می‌تواند پدید آید.

حال اجازه بدهید چگونگی استخراج معادله عرضه ستاده را از تابع سود برازش شده بررسی کنیم. باگرفتن مشتق جزئی مرتبه اول از سود (π^*) که در رابطه (۵-۸) تعریف شده است، نسبت به P_y که قیمت ستاده می‌باشد و با استفاده از روش لم شفارد (یا هوتلینگ) خواهیم داشت.

$$\frac{\partial \pi'^*}{\partial p_y} = y^* = y^*(p_y, p_1, p_2, \ldots, p_m; z_1, z_2, \ldots, z_n) \qquad (۱۳\text{-}۵)$$

رابطه (۵-۱۳) معادله عرضه ستاده را نشان می‌دهد. البته این امکان وجود دارد که معادله عرضه ستاده نیز از تابع سود نرمال شده استخراج گردد.

1 . Shephard's or Hotelling's Lemma

رابطه دوگانه مهم دیگری که مورد نیاز است عبارتست از :

$$\frac{\partial \pi'^*}{\partial z_i} = \frac{\partial y}{\partial z_i} \qquad (۱۴-۵)$$

مفهوم این رابطه عبارتست از اینکه تولید نهائی عامل ثابت i، بوسیله جمله سمت راست رابطه (۵-۱۴) بدست می‌آید، که برابر با مشتق جزئی مرتبه اول تابع سود نرمال شده نسبت به این عامل است. لذا این رابطه به آسانی قادر است قیمتهای سایه‌ای عوامل ثابت را از تابع سود نرمال برازش شده برآورد نماید.

سه رابطه دوگانه داده شده بوسیله روابط (۵-۱۲) الی (۵-۱۴) دلالت بر این دارند که چگونه می‌توان تمامی پارامترهای مهم اقتصادی را به راحتی از تابع سود برآورد نمود.

مثال : مشتقات ذکر شده در بالا را با استفاده از تابع تولید کاب ـ داگلاس می‌توان ثابت نمود. به منظور سادگی، فرض کنید یک تابع تولید با یک نهاده متغیر (X) و یک نهاده ثابت (Z) وجود دارد، این چنین تابع تولیدی را می‌توان این‌گونه نوشت :

$$y = x^a z^b \qquad (۱۵-۵)$$

توجه داشته باشید که فرض بر این است که جمله ثابت در تابع کاب ـ داگلاس در عامل ثابت z ادغام شده است. حال کارفرمای اقتصادی قصد دارد در زمان کوتاه مدت که بعضی از نهاده‌ها مانند زمین و سرمایه ثابت می‌باشند، سود متغیر را حداکثر نماید.

$$\pi' = p_y y - p_1 x \qquad (۱۶-۵)$$

باتقسیم نمودن دو طرف رابطه (۵-۱۶) به P_y و سپس نرمال نمودن قیمت ستاده، خواهیم داشت :

$$\frac{\pi'}{p_y} = y - (p_1/p_y)x \qquad (۱۷-۵)$$

یا

$$\pi = y - rx \qquad (۱۸-۵)$$

در اینجا $\pi = \frac{\pi'}{p_y}$ سود نرمال شده و $r = \frac{p_1}{p_y}$ قیمت نهاده نرمال شده است، حال با جانشین نمودن مقدار y از رابطه (۵-۱۵) در رابطه (۵-۱۸)، داریم :

(۵-۱۹)
$$\pi = x^a z^b - rx$$

اگر $A = z^b$ باشد، بنابراین رابطه (۵-۱۹) به

(۵-۲۰)
$$\pi = Ax^a - rx$$

تبدیل می‌گردد.

از رابطه (۵-۲۰) ، نسبت به x مشتق مرتبه اول گرفته و مساوی با صفر قرار می‌دهیم این یک شرط ضروری برای حداکثر نمودن سود نرمال شده است. بنابراین

(۵-۲۱)
$$\frac{d\pi}{dx} = Aax^{a-1} - r = 0$$

مقدار حداکثر سود نهاده متغیر (x^*) را بوسیله حل رابطه (۵-۲۱) برای محصول میتوان بدست آورد.

(۵-۲۲)
$$x^* = \left\{A^{-1}\left(\frac{r}{a}\right)\right\}^{1/(a-1)}$$

یا

(۵-۲۳)
$$x^* = (A^{-1})^{1/(a-1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{1/(a-1)}$$

با جانشین نمودن مقدار x^* از رابطه (۵-۲۳) در تابع تولید (۵-۱۵) در حالیکه $A = z^b$ می‌باشد، تابع عرضه ستاده بدست می‌آید.

(۵-۲۴)
$$y^* = A^{-1(a-1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{a/(a-1)}$$

با جانشینی روابط (۵-۲۳) و (۵-۲۴) در رابطه (۵-۱۷) ، سود حداکثر شده ($\dfrac{\pi'}{p_y} = \pi^*$) ، بطوریکه یک تابع قیمت نرمال شده است، بدست می‌آید. بنابراین تابع سود بدست آمده عبارتست از :

$$\pi^* = A^{-1/(a-1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{a/(a-1)} - r(A^{-1})^{1/(a-1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{1/(a-1)}$$

یا

$$\pi^* = A^{-1/(a-1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{a/(a-1)} - a\left(\frac{r}{a}\right)(A^{-1})^{1/(a-1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{1/(a-1)}$$

یا

$$\pi^* = A^{-1/(a-1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{a/(a-1)} - a(A)^{-1/(a-1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{a/(a-1)}$$

یا

$$\pi^* = (1-a)A^{-1/(a-1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{a/(a-1)} \quad (۵\text{-}۲۵)$$

با جانشین نمودن z^b برای A در رابطه (۵-۲۵) ، داریم

$$\pi^* = (1-a)z^{-b/(a-1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{a/(a-1)} \quad (۵\text{-}۲۶)$$

که تابع سود نرمال شده می‌باشد. از رابطه (۵-۲۶) به سادگی می‌توان ثابت نمود که $x^* = \dfrac{\partial\pi^*}{\partial r}$ - است.

بیائید مجدداً چگونگی استخراج قیمت سایه‌ای عامل ثابت را مورد ارزیابی قرار دهیم. از تابع تولید (۵-۱۵) تولید نهایی یا هزینه فرصت Z را می‌توان بدست آورد، بطوریکه:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = bx^a z^{b-1} \quad (۵\text{-}۲۷)$$

با جانشینی مقدار بهینه نهاده متغیر :

$$x^* = z^{-b/(a-1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{1/(a-1)}$$

در رابطه (۵-۲۷) ، عبارت زیر برای تولید نهایی بدست می‌آید.

$$\frac{\partial y}{\partial z} = bz^{(1-a-b)/(a-1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{a/(a-1)} \qquad (۲۸-۵)$$

که دقیقاً برابر با همان رابطه بدست آمده بوسیله مشتق مرتبه اول تابع سود (۵-۲۶) نسبت به Z است، که عبارتست از :

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial z} = bz^{(1-a-b)/(a-1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{a/(a-1)} = \frac{\partial y}{\partial z} \qquad (۲۹-۵)$$

۵-۵ ارتباط یک به یک بین توابع تولید و سود و محدودیتهای نظری

وقتی تابع تولید، بسیار پیچیده است، تابع سود، مفیدتر خواهد بود. می‌توان شکل مناسب تابع سود را از نظر اقتصادسنجی به‌گونه‌ای انتخاب نمود که اطمینان دهد که تابع تولید متناظر با آن، محدودیتهایی را که تئوری تولید به آنها اشاره دارد، برآورده می‌سازد. تئوری تناظر یک به یک[1] بین توابع سود و تولید، مستلزم آگاهی درباره شکل تبعی دقیق تابع تولید نمی‌باشد. شرایط زیر بر فرآیند تولید، $y = f(x_1 , x_2 , \dots x_m ; z_1 , z_2 , \dots , z_n)$ که در آن x_i و z_i مقادیر نهاده‌های ثابت و متغیر می‌باشند، وضع شده است.

(۱) تابع تولیددر x_i و z_i پیوسته است، یعنی دارای قابلیت دوبار دیفرانسیل‌گیری در x_i و یکبار در z_i است.

(۲) تابع تولید در x_i و z_i، اکیداً صعودیست یعنی :

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} > 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial z_i} > 0 \qquad \lim_{x_i \to 0} \frac{\partial f}{\partial x_i} \to \infty$$

برای $x_i , i = 1 , 2 , \dots , m$ و $z_i , i = 1 , 2 , \dots , n$

(۳) تابع تولید در x_i اکیداً مقعر است

(۴) $y = f(x_1 , x_2 , \dots x_m ; z_1 , z_2 , \dots , z_n)$ برای تمامی x_i و z_i متناهی، محدود است، بنابراین استفاده از هر مجموعه متناهی مقادیر نهاده‌ها، یک سطح محدود ستاده را ایجاد می‌نماید.

(۵) f وقتی x_i و z_i نامتناهی هستند، نامحدود است.

فروض یاد شده، تضمین می‌کنند که در درون ناحیه غیرصفر، راه حل بهینهٔ یگانه‌ای

1 . Theory of one - To - one correspondence .

برای مسأله حداکثرسازی سودبه دست آید.

متناظر با هر تابع تولید، $y = f(x_1 , x_2 , ... x_m ;z_1 , z_2 , ... , z_n)$ که فروض (۱) تـا (۵) را بـرآورده سـازد، یک تـابع سـود نـرمال شـده یگـانه $\pi^* = \pi^*(r_1 , r_2 , ... r_m ;z_1 , z_2 , ... , z_n)$ وجود دارد که محدودیتهای زیر را برآورده می‌سازد و برعکس. بر این اساس، تابع سود نرمال شده :

(۱) در قیمتهای نرمال شدهٔ نهاده‌های متغیر، یعنی r_i و مقادیر نهاده‌های ثابت، یعنی z_i، بطور پیوسته است.

(۲) در r_i اکیداً کاهنده و در z_i اکیداً فزاینده است.

(۳) در r_i اکیداً محدب است.

(۴) برای تمامی قیمتهای نرمال شدهٔ متناهی، محدود است.

(۵) وقتی همه قیمت‌های نرمال شده به سوی بی‌نهایت می‌روند، غیرمثبت می‌شود.

اگر تابع سود نرمال شده‌ای را انتخاب نمائیم که از فروض (۱) الی (۵) وضع شده بر تابع سود تبعیت نماید، آنگاه این تضمین وجودخواهد داشت که فروض (۱) الی (۵) برای مراحل تولید پابرجا باشد.

علاوه بر فروض وضع شده بر تابع تولید، قیود دیگری نیز باید برای توابع تولید پابرجا باشد که از این قبیل قیود، مهمترین آن، قید مربوط به «تقارن»[1] است، بدین صورت که برای تمامی i و j

$$\frac{\partial f}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j \, \partial x_i}$$

همانند قید تقارن تابع سود که چنین است :

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial r_i \, \partial r_j} = \frac{\partial \pi^*}{\partial r_j \, \partial r_i}$$

۵-۶ محدودیتهای روش تابع سود

علیرغم قابلیت انعطاف بسیار زیاد روش تابع سود، ولی این روش از بعضی مسائل و مشکلات بطور کامل آزاد نمی‌باشد. دو مانع و مشکل اصلی در این روش مشارکت دارند، یکی مربوط به داده‌ها و دیگری مربوط به محاسبه هزینه‌های عمومی است. روش تابع سود موقعی سودمند خواهد بود که اطلاعات صحیح و دقیق از مقادیر فیزیکی ستاده و نهاده‌ها و

---

1 . Symmetry

قیمتهای آنها در دست باشد. اطلاعات مربوط به قیمتها معمولاً یک معضل است. وقتی اطلاعات مورد استفاده بر اساس یک مطالعات مقطعی صورت می‌گیرد. غالباً قیمتهای نهاده و ستاده بر اساس بازده ناخالص و ستاده فیزیکی برای ستاده و هزینه‌های عوامل و مقادیر عوامل برای نهاده‌ها محاسبه می‌شوند، که در این صورت ممکن است تغییرات بسیار جزئی بویژه وقتی حوزه مطالعه کوچک است بوجود آید. گذشته از این، تخمین زننده برای برآورد سیستم معادلات با قیود و معادلات همزمان[1] ممکن است به زمان نسبتاً قابل ملاحظه‌ای احتیاج داشته باشد. لکن زمینه را برای انجام کار به سادگی می‌توان فراهم نمود، مشروط به این که «بسته نرم‌افزاری»[2] طرح اجرای کار برای این منظور در دسترس باشد.

منابع برای مطالعه بیشتر

Binswanger, H.P., "A Cost Function Approach to the Measurement of Factor Demand Elasticities and Elasticities of Substitution", *American Journal of Agricultural Economics*, **56**(2), 1974, pp 377–386.

———, "The Measurement of Technical Change Biases with Many Factors of Production", *American Economic Review*, **64**(6), 1974, pp 964–976.

———, *The Use of Duality between Production, Profit and Cost Functions in Applied Econometric Research: A Didactic Note*, Occasional Paper No. 10, Economics Department, ICRISAT, Hyderabad, 1975.

Diewert, W.E., "Functional Forms for Profit and Transformation Functions", *Journal of Economic Theory*, **6**(3), 1973, pp 284–316.

Fuss, Melvyn and Daniel McFadden (eds.), *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications, Vol. I, The Theory of Production*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

Lau, L.J. and P.A. Yotopoulos, "A Test of Relative Efficiency and Application to Indian Agriculture", *American Economic Review*, **61**(2), 1971, pp 94–109.

———, "Profit, Supply and Factor Demand Functions", *American Journal of Agricultural Economics*, **54**(1), 1972, pp 11–18.

Shephard, R.W., *Cost and Production Functions*, Princeton University Press, Princeton, 1953.

Sidhu, S.S., "Relative Efficiency in Wheat Production in the Indian Punjab", *American Economic Review*, **64**(4), 1974, pp 742–751.

Yotopoulos, P.A. and L.J. Lau, "A Test of Relative Economic Efficiency: Some Further Results", *American Economic Review*, **63**(1), 1973, pp 214–223.

فصل ششـــم

بهینه‌سازی با اطلاعات کامل: تحلیل بدون زمان

در این فصل، روش بهینه‌سازی، بدون کنترل نهاده‌ای و با کنترل نهاده‌ای، به تفصیل بررسی می‌شود. برای سادگی، زمان و ریسک از تحلیل‌ها حذف شده‌اند. اما در فصل‌های بعدی زمان و ریسک را نیز وارد خواهیم کرد.

۶-۱ بهینه‌سازی بدون کنترل نهاده‌ای

این نوع بهینه‌سازی، حالت اولیه و بسیار اساسی بهینه‌سازی است. بی‌گمان طبیعت این روش، عمدتاً فرضی است، اما درک این موضوع می‌تواند سنگ آغازینی باشد، برای حرکت به سوی بهینه‌سازی در شرایط دنیای واقعی. در این مرحله، این بخش برای بسط منطقی موضوع ، بسیار حیاتی است. نبودن کنترل نهاده‌ای به این مفهوم است که هیچ محدودیتی بر حجم موجودی داده‌های لازم برای فرایند تولید، وجود ندارد. به دیگر سخن، مقادیر نهاده‌ها به اندازه کافی زیاد هستند تا به منظور حداکثر سازی سود، هزینه نهایی با درآمد نهایی برابر شود، یا ارزش تولید نهایی با هزینه عامل نهایی برابر شود. بنابراین، مسأله، همان بهینه‌سازی نامقید یا حداکثرسازی نامقید سود می‌باشد.

در این جا، بهترین شرایط عملیاتی برای یافتن مقادیر نهاده‌ای، به منظور دست‌یابی به هدف حداکثر سود، بحث خواهد شد. بهتر است با یک نمونه ساده یک نهاده و یک ستاده شروع کنیم، آنگاه به تدریج آن را بسط داده تا چندین نهاده و ستاده را دربر بگیرد ـ حالت چند جوابی.

تک‌نهاده متغیر

فرض کنید تابع تولید در این حالت چنین باشد:

$$y = f(x_1) \tag{۶-۱}$$

آنگاه معادله سود مربوط به رابطه (۶-۱) چنین خواهد بود:

$$\pi = p_y y - p_1 x_1 \tag{۶-۲}$$

که در آن p_y و p_i قیمت‌های هر واحد ستاده Y و نهاده X_1 می‌باشند. فرض شده است که این قیمت‌ها مثبت باشند، یعنی $0 \leq p_1$ و p_y. π نیز سود حاصل از فرایند تولید را نشان می‌دهد. مقدار π بیانگر بازده‌های مربوط به عامل تولید ثابت $X_i\ (i \neq 1)$ است. با گرفتن مشتق مرتبه اول از π نسبت به x_1، از رابطه (۶-۲)، به دست می‌آوریم:

$$\frac{d\pi}{dx_1} = p_y\,(dy/dx_1) - p_1 \tag{۶-۳}$$

برای حداکثر سازی سود، (۶-۳) را برابر صفر قرار می‌دهیم و آن را برای x_1، یعنی مقدار نهاده، حل می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$p_y\,(dy/dx_1) - p_1 = 0$$

یا

$$dy/dx_1 = p_1/p_y$$

(۶-۴)

که شرط لازم برای حداکثرسازی سود است. شرط مرتبه دوم یا شرط کافی برای حداکثرسازی سود، یعنی:

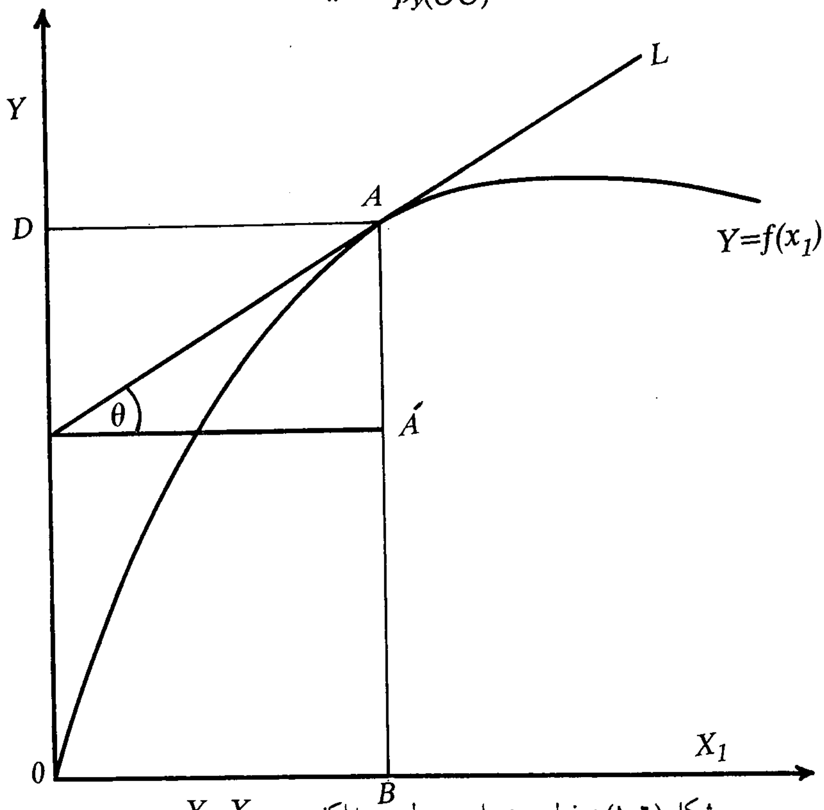
$$d^2\pi/dx_1^2 < 0 \tag{۶-۵}$$

اگر فرض بازدهیِ نزولی برقرار باشد، به طور خودکار برآورده می‌شود. بنابراین، با داشتن یک نهاده متغیر، اگر محدودیت‌هایی بر تابع هدف اعمال نشود، شرط حداکثر سود

وقتی تأمین می‌شود که تولید نهایی نهاده برابر با نسبت قیمت $\frac{p_1}{p_y}$ باشد. این مسأله در شکل ۶-۱ نشان داده شده است. در این شکل CL، یعنی خط برابری سود با شیب $\frac{p_1}{p_y}$ در نقطه A بر منحنی تابع تولید $y = f(x_1)$ مماس می‌باشد. در این نقطه، شرط (۶-۴) برآورده شده است. بنابراین مقادیر بهینه X_1 و Y با OB و OD مشخص شده‌اند.

اکنون سود برابر است با .

$$\pi = p_y(OC)$$



شکل (۶-۱) ، خط سود برابر و سطوح حداکثر سود X_1 و Y

اما ببینیم چگونه شیب خط برابری سود CL، تانژانت θ است، که برای حداکثر کردن سود باید برابر با نسبت قیمت نهاده ـ ستاده باشد. یعنی تولید نهایی X_1 در نقطه A باید با نسبت قیمت $\frac{p_1}{p_y}$ برابر باشد. بنابراین :

$$\tan \theta = \frac{AA'}{CA'} = \frac{p_1}{p_y}$$

یا

$$\frac{CD}{OB} = \frac{p_1}{p_y}$$

بنابراین :

$$p_y(CD) = p_1(OB) \tag{۶-۶}$$

اکنون با این اطلاعات می‌توان نتیجه بگیریم که $\pi = p_y\ (OC)$. یعنی :

$$\pi = p_y(OD) - p_1(OB)$$
$$= p_y(OD) - p_y(CD) = p_y(OD - CD) = p_y(OC)$$

دو نهاده متغیر

در این حالت تابع تولید را می‌توان این گونه نوشت :

$$y = f(x_1, x_2) \tag{۷-۶}$$

و معادله سود نامقید مربوط به آن را این گونه :

$$\pi = p_y y - (p_1x_1 + p_2x_2) \tag{۸-۶}$$

برای حداکثر سازی سود، مشتق‌های جزئی π در (۶-۸) را نسبت به x_1 و x_2 می‌گیریم، و آنگاه هر کدام را برابر با صفر قرار می‌دهیم. سپس، برای بدست آوردن مقادیر نهاده‌های X_1 و X_2 که سود را حداکثر می‌کنند، با این فرض که شرط کافی برآورده شده است، این دستگاه معادلات را حل می‌کنیم.

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = p_y \frac{\partial y}{\partial x_1} - p_1 = 0 \tag{۹-۶}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = p_y \frac{\partial y}{\partial x_2} - p_2 = 0 \tag{۱۰-۶}$$

روابط (٦-٩) و (٦-١٠) شرایط لازم برای حداکثر سازی سود هستند. این شرایط را این گونه نیز می‌توان بیان کرد:

$$p_y \frac{\partial y}{\partial x_1} = p_1$$

$$p_y \frac{\partial y}{\partial x_2} = p_2$$

مشتقات جزئی تابع تولید نسبت به نهاده‌های X_1 و X_2، یعنی $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ و $\frac{\partial y}{\partial x_2}$، همان تولید نهایی فیزیکی نهاده‌ها هستند، یعنی MP_1 و MP_2. بنابراین، شرط لازم برای حداکثر سازی سود، می‌گوید ارزشهای MP_1 و MP_2 باید برابر با قیمت‌های مربوط به خودشان باشد. به دیگر سخن، تولیدکننده می‌تواند تا وقتی که درآمد نهایی حاصل از اشتغال یک واحد اضافی X_i $(i = 1\ ,\ 2)$ بیشتر از هزینه آن واحد باشد، بر تولیدش بیفزاید.

شرایط کافی مربوط به شرایط لازم (٦-٩) و (٦-١٠)، یعنی:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} < 0, \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2^2} < 0$$

و

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1\, \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2\, \partial x_1} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0$$

به طور خودکار به خاطر فرض بازده نزولی تک‌تک عوامل و فرض بازده نزولی به مقیاس، برآورده می‌شوند.

با انتقال $p_y y$ به چپ و π به طرف راستِ علامت مساوی در (٦-٨) و گرفتن مشتق مرتبه اول از y نسبت به x_1 و x_2، خواهیم داشت:

$$\partial y/\partial x_1 = p_1/p_y \tag{۱۱-٦}$$

$$\partial y/\partial x_2 = p_2/p_y \qquad (۱۲-۶)$$

همانند حالت تک‌نهاده متغیر، (۶-۱۱) و (۶-۱۲) نیز بیانگر آنند که MP_i باید برابر با نسبت قیمت نهاده ـ ستاده باشد.

n نهاده متغیر

برای بدست آوردن مجموعه x_n، ..... ، x_2، x_1، که سود را حداکثر کند، روش دو نهاده متغیر را به سادگی می‌توان برای حالت n نهاده متغیر تعمیم داد. در این حالت، باید یک دستگاه n معادله‌ای را همزمان حل کنیم :

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_i} = p_y \frac{\partial y}{\partial x_i} - p_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (۱۳-۶)$$

یا

$$MP_i = \frac{p_i}{p_y}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (۱۴-۶)$$

یا

$$VMP_i = p_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

پاسخ چندگانه: چندین نهاده و چند محصول فرعی در یک محصول

تولید کننده اغلب به تولید هم‌زمان چندین محصول مشغول است، مثلاً با استفاده از چندین نهاده، درجه‌های مختلفی از محصولات کشاورزی یا محصولات حیوانی را به عمل می‌آورد. روش تخصیص چندین نهاده (مثلاً n) به چندین محصول فرعی (مثلاً m)، در یک محصول معین، به صورت زیر است : می‌توان m تابع تولید به صورت زیر داشت :

$$y_j = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad j = 1, 2, \ldots, m \qquad (۱۵-۶)$$

که x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ بیانگر کل مقدار iامین نهاده متغیر برای تخصیص میان m محصول فرعی در یک محصول اصلی، می‌باشد. تابع هدف متناظر با فرآیند تولیدی که با (۶-۱۵) مشخص شده است، به صورت زیر می‌باشد :

$$\pi = \sum_{j=1}^{m} p_{y_j} y_j - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \qquad (۶\text{-}۱۶)$$

با این فرض که شرط مرتبه دوم برآورده شده باشد، مقادیر نهاده‌های حداکثر سازنده سود را می‌توان با حل n معادله همزمان زیر، که از معادله $\frac{\partial \pi}{\partial x_i}$ حاصل شده‌اند، بدست آورد. این معادلات چنین‌اند :

$$\sum_{j=1}^{m} p_{y_j}(\partial y_j/\partial x_i) - p_i = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, m \qquad (۶\text{-}۱۷)$$

پاسخ چندگانه: چندین نهاده و چندین محصول

یک حالت کلاً متفاوت، اما کاملاً عمومی و نزدیک به واقعیت، وقتی است که چندین نهاده را باید بطور همزمان به چندین محصول اختصاص داد و این تخصیص با توجه به یک هدف معین، مثل حداکثرسازی سود، باشد.

فرض کنید فرایند تولید با m تابع تولید بیان شده باشد :

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}) \\ y_2 &= f_2(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_{1m}, x_{2m}, \ldots x_{nm}) \end{aligned} \qquad (۶\text{-}۱۸)$$

که x_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m)$ مقدار iامین عامل (X_i) تخصیص یافته به jامین محصول (Y_j) می‌باشد، که ممکن است برای برخی محصولات، صفر باشد. این m تابع را می‌توان به شکل ضمنی نیز نوشت :

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_m; x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

تابع هدف نامقید کل، در این حالت عبارت است از :

$$\pi = \sum_{j=1}^{m} \pi_j \quad (۶-۱۹)$$

که π بیانگر سود کل و π_j بیانگر سودی است که فقط از محصول jام بدست می‌آید. از آن‌جاکه فرایندهای تولید مربوط به محصولات مختلف، مستقل می‌باشند.

$$\max \pi = \sum_{j=1}^{m} (\max \pi_j) \quad (۶-۲۰)$$

بنابراین شرایط حداکثرسازی سود در این حالت زمانی محقق می‌شود که هر فرایند تولید منفرد به طور جداگانه شرایط حداکثرسازی سود را برآورده سازد. بنابراین، مقادیر بهینه x_{ij} را می‌توان با حل m مجموعه مستقل زیر، که هر کدام شامل n معادله (یا کمتر، اگر برخی از x_iها در برخی فرایندهای تولید، صفر باشند) می‌باشد، بدست آورد :

$$\partial y_j/\partial x_i = p_i/p_{y_j}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m \quad (۶-۲۱)$$

به زبان دیگر، با حل مستقل هر کدام از این m مجموعه n معادله‌ای، می‌توان به m مجموعه، شامل n مقدار متغیر نهاده‌ای، یعنی x_{1j}، x_{2j}، ...، x_{nj} $(j=1 , 2 , ... , m)$، دست یافت.

فروض بازده نهایی نزولی و بازده کاهنده به مقیاس اطمینان می‌دهند که شرایط کافی برای حداکثرسازی سود برآورده شده است.

با بازنویسی (۶-۲۱)، داریم :

$$\{(MP_{ij})p_{y_j}\}/p_i = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m \quad (۶-۲۲)$$

بنابراین، ارزش تولید نهایی iامین عامل بکار رفته برای تولید jامین محصول، باید با قیمت هر واحد iامین محصول، برابر باشد.

با دستکاری رابطه (۶-۲۲) می‌توان به شرایط زیر، در مورد روابط عامل ـ محصول، عامل ـ عامل و محصول ـ محصول، برای حداکثرسازی سود، دست یافت :

(۶-۲۳) : عامل ـ محصول $\quad MP_{ij} = p_i/p_{y_j}$

(۶-۲۴) : عامل ـ عامل $RTS_{ik} = \frac{MP_{ij}}{MP_{kj}} = \frac{p_i}{p_k}$

(در (۶-۲۴) ، RTS_{ik}، نرخ جانشینی فنی iامین عامل برای kامین عامل می‌باشد.)

(۶-۲۵) : محصول ـ محصول $RPT_{jh} = \frac{MP_{ij}}{MP_{ih}} = \frac{p_{y_h}}{p_{y_j}}$

که RPT_{jh}بیانگر نرخ تبدیل محصول از محصول jام به محصول hام ، با استفاده از عامل iام ، می‌باشد.

۶-۲ بهینه‌سازی مقید

برخلاف حالت بهینه‌سازی بدون هیچ گونه محدودیت، تصمیم‌گیرندگان دنیای واقع با محدودیت‌های فراوانی در طول فرایند تولید روبه رو می‌شوند. حداکثر سازی سود به این دلیل ممکن است، مقید باشد که گاهی هدف، تنها تولید مقادیر معینی از یک یا چند محصول است، یا این که منابع مالی برای خرید نهاده‌ها، محدود است. در فرایند تولید، این محدودیت‌ها را به عنوان تساویهایی در نظر می‌گیریم.

دو گونه از محدودیت‌هایی که بر تابع هدف برقرار می‌شود، عبارتند از :

(۱) **محدودیت ستاده هدف** . گاهی ممکن است بنگاه در پی مقدار ستاده معین، مثلاً y°، باشد و هدف آن است که مجموعه‌ای از x_iها ، $i = 1 , 2 , ... , n$ پیدا شود، به‌گونه‌ای که هزینه نهاده‌ها، یعنی $\Sigma\ p_{x_i}x_i$ ، حداقل شود. بنابراین در این حالت، ترکیب حداقل هزینه نهاده‌ها برای مقدار ستاده معینی، پیدا می‌شود.

(۲) **محدودیت مخارج ثابت**. گاهی ممکن است سرمایه در گردش برای خرید نهاده‌ها، ثابت باشد، مثلاً $\mathring{C}$ و هدف آن است که مقادیر حداکثر کننده سود برای نهاده‌های مختلف به دست آید. این روش بهینه‌سازی کمک می‌کند تا آن مقداری از ستاده یا ستاده‌ها که حداکثر کننده سود هستند، به دست آید. این گونه محدودیت‌ها، در دنیای واقع، بیشتر وجود دارند.

هر دوی این محدودیت‌ها را جداگانه با تفصیل بیشتری بررسی می‌کنیم. در همه‌جا فرض بر این است که توابع تولیدی که برای بهینه‌سازی به کار می‌روند، خوش‌رفتار [1] باشند، یعنی اکیداً مقعر [2] باشند. بنابراین، شرایط مرتبه دوم همراه برقرار است و بدین ترتیب، دیگر

1 . Well behaved

2 . Strictly Concave

به آنها اشاره‌ای نخواهیم کرد.

محدودیت ستاده هدف

در این نوع محدودیت، از سه حالت جداگانه می‌توان گفتگو کرد:

۱- تک محصول با ستاده ثابت y°

۲- m محصول با مقادیر ستاده ثابت y°_k

۳- n محصول با درآمد کل ثابت، یعنی $(\sum_{k=1}^{m} y_k p_{yk} = R)$

اکنون به بررسی هر کدام از این مواد می‌پردازیم :

تک‌محصول با ستاده ثابت . فرض کنید تابع تولید در این حالت، چنین باشد

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (۶-۲۶)$$

و ستاده هدف، مقدار ثابت y° باشد.

تابع هدف مقید را می‌توان چنین نوشت :

$$\pi = p_y y - \Sigma p_i x_i + \lambda(y - y^0) \qquad (۶-۲۷)$$

که λ ضریب لاگرانژ نامعین است. برای حداکثرسازی سود، تمامی $n+1$ مشتق مرتبه اول π نسبت به x_iها $(i = 1 , 2 , \ldots , n)$ نسبت به λ را مساوی با صفر قرار می‌دهیم، یعنی:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = p_y(\partial y/\partial x_1) - p_1 + \lambda(\partial y/\partial x_1) = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = p_y(\partial y/\partial x_2) - p_2 + \lambda(\partial y/\partial x_2) = 0$$

$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_n} = p_y(\partial y/\partial x_n) - p_n + \lambda(\partial y/\partial x_n) = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \lambda} = y - y^0 = 0 \qquad (۶-۲۸)$$

با بازنویسی n معادله اول (۶-۲۸) ، این مجموعه معادلات به دست می‌آید :

$$\begin{aligned} p_1(\partial x_1/\partial y) - p_y &= \lambda \\ p_2(\partial x_2/\partial y) - p_y &= \lambda \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ p_n(\partial x_n/\partial y) - p_y &= \lambda \end{aligned} \tag{۶-۲۹}$$

λرا می‌توان از مجموعه معادلات (۶-۲۹) حذف کرد. n -1 معادله حاصل، چنین‌اند:

$$(\partial x_l/\partial y)/(\partial x_j/\partial y) = p_j/p_l \tag{۶-۳۰}$$

یا

$$MP_j/MP_i = p_j/p_i, \qquad i \neq j \tag{۶-۳۱}$$

بنابراین، n معادله در (۶-۳۱) بیانگر معادلات مسیر توسعه هستند، و

$$RTS_{ji} = p_j/p_l \tag{۶-۳۲}$$

این n-1 معادله همراه با یک معادله تولید همسان حاصل از آخرین معادله در (۶-۲۸)، یعنی

$$x_1 = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, y^0) \tag{۶-۳۳}$$

جمعاً n معادله لازم را فراهم می‌آورند، که اگر به طور همزمان حل شوند مقادیر حداقل کننده هزینه را برای n نهاده متغیر بدست می‌دهند، این مقادیر نهاده‌ای، همان مقادیر لازم برای تولید ستاده هدف y° هستند. از آن جاکه $\frac{p_y}{p_i}$ در (۶-۳۲) غیرمنفی است، MP_j و MP_i هر دو باید یا مثبت باشند یا منفی. اگر تابع تولید اجازه دهد که MP_s منفی باشد، آنگاه دو مجموعه نهاده‌ای خواهیم داشت که هر دو، مقدار ستاده y° را تولید می‌کنند. در این حالت، مجموعه نهاده‌های حداقل کنندهٔ هزینه، آن مجموعه‌ای است که شرط مرتبه دوم را برآورده سازد، یعنی همه $RTS_{ji}>0$ و نزولی باشد (یا همه $MP_i>0$). از این گذشته، همه x_iها باید غیرمنفی باشند. حل (۶-۳۲) و (۶-۳۳) ممکن است برای یک یا چند متغیر نهاده‌ای، مقادیر منفی بدهد. مجموعه معقول متغیرهای حداقل کننده هزینه، باید شامل راه‌حل‌های حدی نیز

باشد. این، بدین مفهوم است که یک یا چند متغیر باید مقدار صفر داشته باشند. در این حالت، وقتی برخی x_iها منفی هستند، تقاطع تولید همسان y° با محور $x_i = 0$، نقطه مورد نظر خواهد بود.

حل مجموعه معادلات (۶-۳۲) و (۶-۳۳) بدین مفهوم است که تولید y°، با حداقل هزینه، به وسیله تقاطع خطوط شیب همسان و تولید همسان مشخص می‌شود. خطوط شیب همسان نیز مسیرهای توسعهٔ حداقل هزینه‌ای نامیده شده‌اند، زیرا آنها نشان دهنده مسیر ترکیب‌های حداقل هزینه‌ای نهاده‌ها، همچنان که y° افزایش می‌یابد، می‌باشند.

m محصول با مقادیر ستاده‌ای ثابت y°_k. فرض کنید m تابع تولید مستقل وجود دارد :

$$y_k = f(x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk}), \qquad k = 1, 2, \ldots, m \tag{۳۴-۶}$$

و محدودیت‌های ستاده‌ای چنین‌اند :

$$y_k = y_k^0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m \tag{۳۵-۶}$$

تابع هدف متناظر با (۶-۳۴) و (۶-۳۵) ، چنین خواهد بود :

$$\pi = \sum_k p_{y_k} y_k - \sum_i \sum_j p_i x_{ik} + \sum_k \lambda_k (y_k - y_k^0) \tag{۳۶-۶}$$

که x_{ik} بیانگر مقدار نهاده X_i به کار رفته در تولید محصول kام می‌باشد، حداکثرسازی π مستلزم آن است که مشتقات مرتبه اولش نسبت به x_{ik} و λ_k، تک‌تک برابر با صفر قرار داده شوند. بدین ترتیب m مجموعه معادله، که هر کدام دارای $n + 1$ معادله است، به دست می‌آید. با این فرض که شرط کافی غیرصفر بودن MP_iها برآورده شده باشد. حل جداگانه همهٔ این مجموعه‌های دستگاه معادلات، m مجموعه لازم از بردارهای نهاده‌ای حداقل کننده هزینه، به دست می‌دهد.

m محصول ، با درآمد کل ثابت $(\sum_{k=1}^{m} p_{yk} y_k = R)$. در این مورد، تابع سود مقید

چنین است :

$$\pi = \sum_k p_{y_k} y_k - \sum_i \sum_k p_i x_{ik} + \lambda(\sum_k p_{y_k} y_k - R) \qquad (۶\text{-}۳۷)$$

که می‌خواهیم آن را حداکثر کنیم. از (۶-۳۷)، با قراردادن $\frac{\partial_n}{\partial x_{ik}}$ و $\frac{\partial \pi}{\partial \lambda}$ برابر با صفر، $mn+1$ معادله به دست می‌آوریم، یعنی

$$p_{y_k}(\partial y_k/\partial x_{ik}) - p_i + \lambda p_{y_k}(\partial y_k/\partial x_{ik}) = 0$$

$$\Sigma p_{y_k} y_k - R = 0 \qquad (۶\text{-}۳۸)$$

می‌توان λ را از (۶-۳۸) حذف کرد و این مجموعه معادلات را حل کرد تا ترکیب حداقل کننده هزینه‌ای مربوط به mn متغیر نهاده‌ای را، برای دست‌یابی به هدف درآمد کل R، به دست آورد.

متناظر با $mn + 1$ معادله موجود در (۶-۳۸)، چهار مجموعه شرایط مرتبه اول باید برآورده‌شوند، تا مقادیر حداقل کننده هزینه‌نهاده‌های لازم برای تولید چند محصول، به دست آید. این چهار مجموعه شرایط مرتبه اول عبارتند از :

(۱) معادلات مکان هندسی درآمدهای یکسان :

$$y_u = (R/p_{y_u}) - \Sigma\{(p_{y_k}/p_{y_u})y_k\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m;\ k \neq u \qquad (۶\text{-}۳۹)$$

که می‌توان آنها را از معادله دوم (۶-۳۸) بدست آورد.

(۲) معادلات $(m\text{-}1)$ رابطهٔ محصول ـ محصول :

$$RPT_{vk} = p_{y_v}/p_{y_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m;\ k \neq v \qquad (۶\text{-}۴۰)$$

که RPT_{uk} نرخ تبدیل محصول از v ام به محصول k ام است. این خطوط بیانگر مسیرهای توسعه حداقل کننده هزینه، در فضای ستاده‌ای، می‌باشند.

(۳) معادلات $(n\text{-}1)$ رابطه عامل ـ عامل :

$$RTS_{wj} = p_w/p_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n; j \neq w \tag{۴۱-۶}$$

(۶-۴۱) ، معادلات خطوط شیب همسان است، که در فضای نهاده‌ای، مسیرهای توسعه حداقل کننده هزینه را نمایش می‌دهند.

(۴) معادلات $(m\text{-}1)$ $(n\text{-}1)$ رابطه عامل ـ محصول :

$$p_{y_1}(MP_{11})/p_1 = p_{y_k}(MP_{jk})/p_j,$$

$$j = 2, 3, \ldots, n; k = 2, 3, \ldots, m \tag{۴۲-۶}$$

در این جا، MP_{jk} تولید نهایی نهاده X_j در تولید محصول Y_k می‌باشد. این، بدین مفهوم است که نسبت ارزش تولید نهایی هر عامل (VMP) در تولید هر محصول، به قیمت آن نهاده، باید برای همه عوامل و محصولات، برابر باشد.

محدودیت مخارج ثابت

در دنیای واقع، بندرت وجوه نامحدودی برای خرید داده‌های لازم برای یک فرآیند تولید، وجود دارد. بیشتر مواقع، این وجوه کاملاً محدود است. بنابراین، محدودیت مهمی که برای کشاورز حداکثر کننده سود وجود دارد، این است که وجوهی که می‌تواند هزینه کند، محدود است. به دیگر سخن، هدف تصمیم‌گیرنده آن است که برداری از مقادیر نهاده‌های مختلف را، برای تولید یک یا چند محصول، به گونه‌ای انتخاب کند که محدودیت مخارج ثابت را نقض نکند.

در این مورد نیز، از سه امکان منطقی، به صورت زیر، می‌توان گفتگو کرد:

۱ـ تک محصول، با صرف وجوه محدود

۲ـ m محصول، با صرف وجوه محدود برای هر محصول

۳ـ m محصول، با صرف وجوه محدود برای همه محصولات، با هم.

تک‌محصول، با صرف وجوه محدود. گیریم تابع تولید چنین باشد :

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (۶-۴۳)$$

و وجوه در دسترس برای خرید نهاده‌ها، محدود به مقدار C باشد. بنابراین معادله هزینه چنین است:

$$C = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n \qquad (۶-۴۴)$$

در (۶-۴۴)، P_i، $i = 1, 2, \ldots, n$، قیمت‌های هر واحد نهاده‌های X_1 و X_2 و ... و X_n می‌باشد. از (۶-۴۳) و (۶-۴۴) می‌توان تابع هدف مقید را به صورت زیر نوشت:

$$\pi = p_y y - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \lambda(\Sigma p_i x_i - C) \qquad (۶-۴۵)$$

که π، سود و p_y، قیمت هر واحد محصول Y، λ، ضریب نامعین لاگرانژ می‌باشد. بقیه علائم همانهایی هستند که پیش‌تر نیز داشتیم. اکنون برای حداکثر سازی سود π، مشتقات $\frac{\partial \pi}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ و $\frac{\partial \pi}{\partial \lambda}$ را به دست می‌آوریم و هر کدام از آنها را برابر با صفر قرار می‌دهیم. یعنی:

(۶-۴۶. الف)

$$\begin{aligned} p_y(\partial y/\partial x_1) - p_1 + \lambda p_1 &= 0 \\ p_y(\partial y/\partial x_2) - p_2 + \lambda p_2 &= 0 \\ \vdots \\ p_y(\partial y/\partial x_n) - p_n + \lambda p_n &= 0 \end{aligned}$$

(۶-۴۶. ب)

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - C = 0$$

سیستم n معادله‌ای (۶-۴۶. الف) را می‌توان حل کرد تا λ حذف شود و $n-1$ معادله خط شیب همسان بدست آید، یعنی

$$-\partial x_i/\partial x_j = p_j/p_i$$

یا

$$RTS_{ji} = p_j/p_i, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j \qquad (۶-۴۷)$$

معادله (۶-۴۶. ب) را می‌توان بازنویسی کرد تا معادله هم هزینه بدست آید:

$$x_1 = C/p_1 - \sum_{i=2}^{n} (p_i/p_1)x_i \qquad (۶\text{-}۴۸)$$

بنابراین، (۶-۴۷) و (۶-۴۸) مجموعه‌ای از n معادله همزمان را تشکیل می‌دهند که می‌توان آنها را برای پیدا کردن مقادیر n نهاده‌ای که مجموع هزینه آنها C است، حل کرد. این نهاده‌ها بالاترین محصولی که می‌توان با توجه به هزینه C تولید کرد را بدست می‌دهند. این مقادیر نهاده‌ها، با توجه به مقدار معینی وجوه، و با فرض معمول رقابت کامل، سود را نیز حداکثر می‌کنند.

برای کنترل این که آیا سودهای بدست آمده، بالاترین مقدار هستند یا نه، نسبت $\frac{p_y MP_i}{P_i}$ را برای هر نهاده بدست آورید و آن را با یک، مقایسه کنید. اگر

$$\frac{p_y MP_i}{p_i} < 1$$

بدین مفهوم است که حداکثر مقید، وجوه بیشتری نسبت به راه حل نامقید بـه کـار می‌گیرد.

در این حالت، استفاده از روش بهینه‌سازی در شرایط مخارج ثابت، مناسبتی ندارد، زیرا این محدودیت، اضافی است. هرچه مقدار $\frac{p_y MP_i}{P_i}$ به یک نزدیک‌تر باشد، محدودیت مخارج، قدرتمندتر خواهد بود، و برعکس.

m محصول، با صرف وجوه محدود برای هر محصول. این مسأله بهینه‌سازی، به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}
y_1 &= f_1(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}) \\
y_2 &= f_2(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}) \\
&\vdots \\
y_m &= f_m(x_{1m}, x_{2m}, \ldots, x_{nm}) \\
\sum_i (p_i x_{ir}) &= C_r, \qquad r = 1, 2, \ldots, m
\end{aligned} \qquad (۶\text{-}۴۹)$$

در (۶-۴۹)، مجموعه مقادیر بهینه نهاده‌ها برای هر محصول، با بکار بردن روشی که پیش‌تر توضیح داده شد، برای هر تابع تولید منفرد، بدست می‌آید.

مجموعه m تابع تولید داده شده در (۶-۴۹) را می‌توان به سادگی با نوشتن شکل

ضمنی تابع تولید، به شکل کلی‌تری درآورد. یعنی :

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_m; x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

m محصول، با صرف وجوه محدود برای همه محصولات. در آن جا، تابع تولید می‌تواند به صورت زیر باشد :

$$y_r = f_r(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad r = 1, 2, \ldots, m \qquad (۶-۵۰)$$

و تنها محدودیت موجودی سرمایه، چنین می‌باشد :

$$\sum_i \sum_r p_i x_{ir} = C \qquad (۶-۵۱)$$

از (۶-۵۰) و (۶-۵۱) می‌توان تابع هدف مقید را چنین نوشت :

$$\pi = \sum_r p_{y_r} y_r - \sum_i \sum_r p_i x_{ir} + \lambda\{\sum_i \sum_r (p_i x_{ir} - C)\} \qquad (۶-۵۲)$$

با گرفتن مشتقات مرتبه اول π نسبت به x_{ir}، $(i = 1, 2, \ldots, n; r = 1, 2, \ldots, m)$ و نسبت به λ و مساوی صفر قراردادن هرکدام از این $mn+1$ معادله، خواهیم داشت:

$$p_{y_r}(\partial y_r/\partial x_{ir}) - p_i + \lambda p_i = 0, \qquad r = 1, 2, \ldots, m \qquad (۶-۵۳)$$

$$\sum_i \sum_r p_i x_{ir} - C = 0 \qquad (۶-۵۴)$$

λ را می‌توان از (۶-۵۳) حذف کرد و این مجموعه معادلات را بدست آورد :

$$(p_{y_1}/p_1)(\partial y_1/\partial x_{11}) = (p_{y_r}/p_i)(\partial_{y_r}/\partial x_{ir})$$
$$i = 2, 3, \ldots, n; r = 1, 2, \ldots, m \qquad (۶-۵۵)$$

با بازنویسی (۶-۵۴)، یک معادله هم هزینه، به شکل زیر، به دست می‌آوریم :

$$x_{11} = C/p_1 - \sum_i \sum_r \{(p_i/p_1)x_{ir}\}$$
$$i = 2, 3, \ldots, n; r = 1, 2, \ldots, m \qquad (۶-۵۶)$$

حل mnمعادله (٦-۵۵) و (٦-۵٦) ، mمجموعه nنهاده‌ای برای حداکثرسازی سود بدست می‌دهد. محدودیت مخارج کل تنها وقتی مؤثر است که $VMP_{ii}/P_i>1$ باشد.

باید یادآوری کرد که (٦-۵۵) کلاً دارای $mn-1$ معادله است، که شامل $m-1$ رابطه محصول ـ محصول، $n-1$رابطه عامل ـ عامل و $(m-1)(n-1)$ رابطه عامل ـ محصول، می‌باشد. این راه حل را به صورت نموداری نیز می‌توان در نقطه‌ای که خطوط شیب‌همسان، نقشه هم‌هزینه را قطع می‌کند، به دست آورد.

تمـریـــن:

۶-۱ تابع واکنش مربوط به کود شیمیایی، برای بادام زمینی چنین است :

$$y = 1860 + 12.5P - 0.16 P^2$$

که yمحصول بادام زمینی (هکتار / کیلوگرم) ، و pکود شیمیایی (هکتار / کیلوگرم) می‌باشد. تأثیر همه عوامل دیگر بر محصول بادام زمینی، ثابت گرفته شده است. اگر قیمت هر کیلوگرم بادام زمینی و کود شیمیایی، به ترتیب 2.85 روپیه و 7.50 روپیه باشد، مقادیر زیر را محاسبه کنید :

(۱) آن مقداری از pرا که سطح محصول را حداکثر می‌کند، به دست آورید.

(۲) آن مقداری از pکه سود را حداکثر می‌کند و مقدار محصول مربوط به آن را، بدست آورید.

(۳) مقدار بهینهٔ اقتصادی pرا با محدودیت ستاده‌ای $y = 2000Kg$، بدست آورید.

(۴) مقدار بهینهٔ اقتصادی pرا با محدودیت هزینه $C = 200$ بدست آورید.

(۵) تابع تقاضای ایستای معمولی را برای pبدست آورید.

۶-۲ با توجه به تابع تولید زیر :

$$y = aox_1^{a1}x_2^{a2}x_3^{a3}$$

که در آن yو x_i $(i = 1 , 2 ,3)$ ، بیان‌گر مقادیر ستاده و نهاده‌ها هستند، و a_iها ، $(i =1,2,3)$ ، مقادیر ثابت می‌باشند. اگر قیمت هر واحد ستاده ونهاده‌ها با p_yو p_i ، $(i=1,2,3)$ ، باشد، موارد زیر را بدست آورید :

(۱) مقدار بهینه اقتصادی نهاده‌ها را با محدودیت ستاده‌ای $y= y^{\circ}$.

(۲) مقدار بهینه اقتصادی نهاده‌ها را با محدودیت مخارج $\Sigma(p_ix_i) = C$

(۳) روش بهینه‌سازی با یک محدودیت بر روی مخارج، را به حالت nنهاده‌ای تعمیم دهید.

۶-۳ تابع تولید در هکتار برای سیب‌زمینی به صورت زیر است:

$$y = 5.94x_1^{0.28}\ x_2^{0.24}x_3^{0.2}$$

که yنشان دهندهٔ ستادهٔ سیب‌زمینی به تن و x_1، x_2و x_3به ترتیب بیان‌گر مقادیر بذر (به‌تن)، کود (به روپیه) و کار (به روپیه) می‌باشند. مقادیر بهینه اقتصادی نهاده‌ها را، وقتی قیمت هر واحد بذر سیب‌زمینی 205 روپیه در هر تن و مخارج تنها محدود است به 3000 روپیه، به دست آورید. آیا این یک محدودیت مؤثر است؟

۶-۴ تابع واکنش مربوط به‌کود شیمیایی ازت برای تولیدگندم در خاکهای ماسه‌ای و خاکهای رس، در سال ۷۳-۱۹۷۲ در پنجاب چنین بوده است:

$$y_s = 1939 + 40.2n - 0.233n^2$$

$$y_L = 2264 + 45.5n - 0.266n^2$$

که در آن y_sو y_lبیان‌گر محصول گندم (هکتار / کیلوگرم) بر روی زمین‌های ماسه‌ای و زمین‌های رُسی می‌باشد و nمقدار کود ازتی است که در هر هکتار (به کیلوگرم) استفاده شده است. قیمت‌های هر کیلوگرم گندم و ازت به ترتیب 1.53 روپیه و 4.82 روپیه می‌باشد.

(۱) مقدار ازت حداکثر کننده محصول، و مقدار بهینهٔ اقتصادی ازت را در هر هکتار، برای زمین‌های ماسه‌ای و رسی بدست آورید.

(۲) اگر زمین‌های ماسه‌ای و رسی، در یک مزرعه خاص به ترتیب 10 و 15 هکتار باشند، و صرف هزینه برای ازت محدود به 7000 روپیه باشد، مقادیر بهینهٔ اقتصادی ازت را برای تولید گندم بر روی هر کدام از انواع خاک، محاسبه کنید.

۶-۵ دیدگاه بسیار پذیرفته شده‌ای می‌گوید تخصیص منابع در کشاورزی سنتی بسیار ناکارا است. این نتیجه‌گیری تا چه حد ممکن است ناشی از حلقه‌های آماری و آزمونهای غلط فرضیه‌ها باشد؟

۶-۶ برای آزمون عقلانیت تخصیص منابع، چگونه عمل می‌کنید؟ آیا روشهای

رضایت‌بخشی وجود دارد؟ توضیح دهید؟

۶-۷ آیا تخصیص منابع درکشاورزی آمریکا از تخصیص منابع درکشاورزی هند، متفاوت است؟ دلایل خود را بیاورید.

منابع برای مطالعه بیشتر

Chennareddy, V., "Production Efficiency in South Indian Agriculture", *Journal of Farm Economics*, **49**(4), 1967, pp 816-820.

Dillon, J.L., *The Analysis of Response in Crop and Livestock Production*, 2nd ed., Pergamon Press, Oxford, 1977, Ch. 2.

Heady, E.O. and John L. Dillon, *Agricultural Production Functions*, The Iowa State University Press, Ames, Iowa, 1961, Ch. 2.

Hopper, W.D., "Allocative Efficiency in a Traditional Agriculture", *Journal of Farm Economics*, **47**(3), 1965, pp 611–624.

Krishna, Raj. "Some Production Functions for the Punjab", *Indian Journal of Agricultural Economics*, **19**(3 and 4), 1964, pp 87–97.

Rudra, A., "More on Returns to Scale in Indian Agriculture", *Economic and Political Weekly*, **3**(42), 1968., pp A33–A38.

Saini, G.R., "Resource-Use Efficiency in Agriculture", *Indian Journal of Agricultural Economics*. **24**(2), 1969, pp 1–18.

Singh, J.P., "Resource Use, Farm Size and Returns to Scale in a Backward Agriculture", *Indian Journal of Agricultural Economics*, **30**(2), 1975, pp 32–46.

فصل هفتم

بهینه‌سازی در زمان

در فصل‌های پیشین، اثر زمان را بر تابع تولید و بر بهینه‌سازی نهاده‌ها در فرآیند تولید، نادیده گرفتیم. به دیگر سخن، زمان به عنوان یک نهادهٔ ثابت در نظر گرفته شد. تابع تولید بیان‌گر رابطه نهاده‌ها و ستاده‌ها در دورهٔ جاری بود و سود فقط برای دوره جاری حداکثر شد. در این فصل، اثر نهادهٔ زمان بر تولید ستاده و بر بهینه‌سازی نهاده‌ها، در شرایط اطلاعات کامل از محصولات و قیمت‌ها، صریحاً وارد شده است. بنابراین، رفتار بهینه‌سازی در شرایط پویا مورد بررسی قرار می‌گیرد، گرچه هنوز اثر ریسک یا عدم اطمینان را نادیده می‌گیریم.

زمان عمدتاً چهارگونه اثر بر تولید دارد :

۱ـ سهم نهاده‌های ثابت در ستاده ممکن است بستگی به طول دوره تولید داشته باشد. بنابراین زمان (t) به عنوان یک نهاده متغیر، در میان دیگر نهاده‌ها، در تابع تولید گنجانده می‌شود، یعنی :

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \qquad (۱-۷)$$

مثال خوبی از این مسأله را می‌توان در ارتباط مقدار پشم حاصل از یک گوسفند، به طول زمانی که پس از آن پشم چینی انجام می‌شود، دید. به همین ترتیب، عصارهٔ موجود در نیشکر بستگی به دوره‌ای دارد که پس از آن درو انجام می‌شود. در واقع، این پدیده در کشاورزی، در همه فرآیندهای تولید عمومیت دارد، گرچه ممکن است در بسیاری مواقع، آشکار نباشد.

۲ـ ظرفیت یک مجموعه از نهاده‌های ثابت ممکن است از عامل زمان تأثیر بپذیرد. مثلاً ظرفیت یک قطعه زمین برای تولید محصولات، ممکن است در طول زمان افزایش یا کاهش یابد، بسته به این که آیا مسائلی همچون فرسایش خاک و شستشوی خاک به وسیله آب، کنترل و مهار شده باشد یا نه.

۳ـ الگوی استفاده از نهاده‌ها یا الگوی تولید ستاده یا توالی زمانی، ممکن است بر محصول اثر بگذارد. بنابراین گاهی تابع تولید چنین است :

$$y = f(t) \tag{۲-۷}$$

در کشاورزی، این تجربه فراگیری است که محصول یک کشت از الگوی کاربرد نهاده، تأثیر بپذیرد. مثلاً محصول یک کشت ممکن است بسته به این که آیا همهٔ کود در زمان کاشت داده شود یا در طول ۳ یا ۴ دورهٔ برابر، در فاصله کاشت و برداشت، تغییر کند. به همین ترتیب، زمان‌بندی آبیاری می‌تواند اثر مشابهی بر محصول یک کشت داشته باشد.

۴ـ زمان ممکن است بر محصول، از طریق اثر ماندگار برخی نهاده‌ها، که‌اثر باقی‌مانده نامیده می‌شود، اثر بگذارد. این اثر، از آن جا بوجود می‌آید که برخی نهاده‌ها که در یک دوره تولیدی استفاده می‌شوند، در همان دوره به طور کامل استفاده نمی‌شوند، و بخشی از اثرشان باقی می‌ماند. اثر ماندگار کود بر محصولات، پدیده‌ای است که در کشاورزی عمومیت دارد.

زمان را می‌توان هم به صورت ناپیوسته وارد کرد و هم به صورت پیوسته. می‌توان توابع تولید چند دوره‌ای تعریف کرد و روشهای بهینه‌سازی تک دوره‌ای را به افق‌های T دوره‌ای تعمیم داد. اما معرفی زمان باید همراه با تعدادی فروض ساده کننده باشد : زمان به دوره‌های مساوی تقسیم می‌شود و تولید کننده، عوامل تولید را در آغاز هر دوره استفاده می‌کند تا ستاده را در پایان همان دوره زمانی، تولید کند.

همان‌گونه که در فصل ۶ آمد، روش بهینه‌سازی را می‌توان در شرایط حداکثرسازی مقید سود و حداکثرسازی نامقید سود، بحث کرد. اکنون به طور خلاصه این موارد را بررسی می‌کنیم.

۷-۱ حداکثرسازی نامقید سود

در تحلیل بدون زمان، حداکثرسازی سود یا بهینه‌سازی تخصیص نهاده‌ها به یک یا چند محصول، مستلزم تحقق شرط زیر است :

$$MP_i = p_i/p_y$$

یا

$$p_y MP_i = p_i$$

یا

$$VMP_i = p_i = MFC_i \qquad (۷-۳)$$

که VMP_i، P_i و MFC_i به ترتیب بیان‌گر ارزش تولید نهایی، قیمت هر واحد نهاده و هزینه عامل نهایی برای iامین نهاده، می‌باشند.

این شرط اشاره به آن دارد که استفاده از نهاده X_i در تولید ستاده Y باید تا حدی گسترش یابد، که آخرین واحد نهادهٔ iام، دقیقاً به اندازه هزینه خودش، درآمد ایجاد کند. این اصل اصولاً بدون تغییر باقی می‌ماند، حتی وقتی زمان را به عنوان یک متغیر در یک تابع تولید وارد می‌کنیم. اکنون تنها اختلاف، این است که هزینه فرصت زمان نیز در هزینه عامل نهایی گنجانده می‌شود و به خاطر ورود زمان به عنوان یک نهادهٔ متغیر که بر ستاده تأثیر می‌گذارد. اثرات ترجیح زمانی به وجود می‌آید. برای ساده کرن تحلیل، اکنون روش بهینه‌سازی را بدون ترجیحات زمانی و با ترجیحات زمانی، به طور جداگانه، با فرض داشتن یک تابع تولید وابسته به زمان مورد بررسی قرار می‌دهیم.

بهینه‌سازی بدون ترجیحات زمانی

در این جا، نرخ بهره را صفر می‌گیریم. گرچه این مسأله در بیشتر کشورهای جهان، به استثناء برخی کشورهای اسلامی، عمومیت ندارد، اما یادگیری بهینه‌سازی در چنین شرایطی، به عنوان یک نتیجه منطقی، اهمیت دارد. در این قسمت، اثر هزینه فرصت زمان را فقط بر بهینه‌سازی منابع بررسی می‌کنیم، و ترجیحات زمانی را نادیده می‌گیریم. با فرض اینکه فرآیند تولید وابسته به زمان چنین باشد :

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (۴-۷)$$

$$x_i = f_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{۵-۷}$$

که در آن، tدوره باروری[1] است. برای سادگی، باز فرض می‌شود که نهاده‌ها در آغاز هر دورهٔ تولید به‌کار گرفته می‌شوند و این‌که آنها باید آثار ماندگار بر تولید نداشته باشند. این فرآیند تولید در طول زمان تکرار می‌شود.

وقتی قیمت نهاده‌ها و قیمت ستاده، ثابت فرض شده باشد، روش بهینه‌سازی بـرای نهاده‌ها در هر دوره از طول مدت تولید، همانند بقیه دوره‌هاست؛ حداکثرسازی سود کل در طول تعدادی از دوره‌های مدت تولید، باید با حداکثرسازی سود در واحد زمان، یکسان باشد. اگر سود در واحد زمان با π^0نشان داده شود و هزینهٔ مجموعه نهاده‌های ثابت در طول مدت تولید با F، تابع هدف نامقید برای واحد زمان را می‌توان چنین نوشت:

$$\pi^0 = (p_y y - \Sigma p_i x_i - F)/t \tag{٦-۷}$$

باید یادآوری کرد که F/t در این جا، دیگر یک ثابت نیست، زیرا t یک متغیر است. بنابراین، هزینه نهاده‌های ثابت را نمی‌توان آن گونه که در تحلیل بدون زمان عمل می‌شد، نادیده گرفت. بدین ترتیب، این نقطه اصلی عزیمت از چارچوب تحلیل بدون زمان است. اکنون، با مشتق‌گیری از (۷-٦) نسبت به x_i، و مساوی با صفرقراردادن آن و تجدید آرایش جمله‌ها، خواهیم داشت :

$$p_y(\partial y/\partial x_i) = p_i + \{(\partial t/\partial x_i)(p_y y - \Sigma p_i x_i - F)\}/t \tag{۷-۷}$$

با قراردادن $P_y y = R$، و $\Sigma p_i x_i + F = C$، که به ترتیب درآمد و هزینه طول مدت تولید هستند، می‌توان (۷-۷) را این گونه بازنویسی کرد :

$$\partial R/\partial x_i = \partial c/\partial x_i + (\partial t/\partial x_i)\pi^0 \tag{۸-۷}$$

1 Gestation period

در (۷-۸) ، جمله سمت چپِ مساوی، بیان‌گر MVP_i و جمله سمت راستِ مساوی بیان‌گر هزینه عامل نهایی مربوط به نهادهٔ x_i، می‌باشد. هزینه عامل نهایی x_i دارای دو جزء است. بخش اول، یعنی $\frac{\partial c}{\partial x_i}$ ، هزینه عامل نهایی X_i است (MFC) بدون ملاحظه زمان، که می‌توان آن را هزینه نهایی اصلی x_i نام نهاد. بخش دوم، یعنی $\frac{\partial t}{\partial x_i}\pi^{\circ}$، بیان‌گر هزینه فرصت یک واحد از X_i می‌باشد، که در جای خود تشکیل شده است، از حداکثر سود متوسط بر واحد زمان در دورهٔ بعدی تولید، ضرب در زمان لازم برای استفاده از یک واحد نهادهٔ x_i.

بنابراین، ورود زمان منجر به افزایش MFC مربوط به x_i به اندازه $\frac{\partial t}{\partial x}\pi^{\circ}$ می‌شود که به نوبه خود مقدار بهینه نهاده‌ها را در زمان، در مقایسه با مقادیری که از تحلیل بدون زمان به دست می‌آمد، کاهش می‌دهد. بدین ترتیب، مجموعه مقادیر بهینه نهاده‌های متغیر به وسیله برابری ارزش تولید نهایی مربوط به این نهاده‌ها، با هزینه نهایی کلی هر کدام از این عوامل، بدست می‌آید. که هزینه نهایی کلی هر عامل در جای خود، دربرگیرنده هزینه فرصت زمانی مربوط به آن عامل نیز هست.

مثال . اثر زمان را بر بهینه‌سازی بدون هیچ‌گونه محدودیت و بدون ترجیحات زمانی، می‌توان با بررسی این تابع واکنش وابسته به زمان، نشان داد :

$$y = 2500 + 10x_1 - 0.02x_1^2 \qquad x_1 = 0.5t$$

بگذارید باز فرض کنیم که P_y مساوی با 1.5 و P_1 مساوی با 6 و هزینه ثابت دوره تولید F مساوی با 4250 باشد. برای این فرآیند تولید، بدون ملاحظه زمان، ستاده y در $x_1 = 250$ حداکثر شده است و حداکثر سود در $x_1 = 150$ بدست آمده است. اگر (۷-۸) را برای بهینه‌سازی، بدون وجود ترجیحات زمانی، به کار ببریم، سود در $x_1 = 129.10$ حداکثر می‌شود. بنابراین، ورود متغیر زمان به فرآیند تولید منجر به کاهش مقدار ستادهٔ بهینه حداکثر کنندهٔ سود، می‌شود.

بهینه‌سازی با ترجیح زمانی

ترجیحات زمانی، در آن بخشهایی از دنیای واقع که با تولید سروکار دارند، کاملاً دارای اهمیت است. بنابراین لازم است یک روش بهینه‌سازی برای فرآیندهای تولیدی وابسته به زمان، با وجود ترجیحات زمانی، بسط داده شود. اگر فرآیند تولیدی که با (۷-۴) و (۷-۵)

بیان شد، برای mدوره تولیدی تکرار شود، این مهم است که برای تعیین ارزش حال سودهای آینده، اجازه بدهیم هزینه‌ها با بهرهٔ مرکب محاسبه شوند و مقادیر کلی را به جریان‌های معادل آنها در طول زمان تبدیل کنیم، تا بتوان از حساب دیفرانسیل استفاده کرد. هنگام گفتگو از روش بهینه‌سازی همراه با ترجیحات زمانی، از علامت‌گذاری زیر استفاده خواهیم کرد:

t طول زمانی دورهٔ تولید.

r نرخ بهره ترجیح زمانی در هر واحد زمان. [ارزش مرکب یک واحد هزینه در زمان t برابر است با $(1+r)^t$، و ارزش حال یک واحد سود بدست آمده در زمان t برابر است با $(1+r)^{-t}$]

رابطهٔ بین نرخ بهره برای دورهٔ تولید (مثلاً i) و نرخ بهره برای واحد زمان (r) چنین است :

$$(1 + i) = (1 + r)^t \quad \text{or} \quad i = (1 + r)^t - 1$$

δ نرخ بهره‌ای است که همان کار r را در تنزیل پیوسته یا ربح مرکب پیوسته، انجام می‌دهد، بنابراین $\delta = Ln\ (1+r)$.

بنابراین، π، یعنی سودی که در پایان هر دورهٔ تولید تحقق می‌یابد، را می‌توان بدین‌گونه نوشت :

$$\pi = p_y y - (\Sigma\, p_i x_i + F)(1 + r)^t$$

با استفاده از فرمول وجوه استهلاکی[1] پیوسته، $\delta / \{(1+r)^t - 1\}$، سود کلی π را می‌توان به معادل جریانی آن، یعنی سود بر واحد زمان (π^*) تبدیل کرد. یعنی :

$$\pi^* = \frac{\pi\delta}{(1 + r)^t - 1} \qquad (۹\text{-}۷)$$

از (۷-۹) مشتق $\frac{\partial \pi^*}{\partial t}$ را بدست می‌آوریم و برابر با صفر قرار می‌دهیم، یعنی :

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial t} = \frac{\delta(\partial\pi/\partial t)\{(1 + r)^t - 1\} - \delta\pi(1 + r)^t \ln (1 + r)}{\{(1 + r)^t - 1\}^2} = 0 \qquad (۱۰\text{-}۷)$$

1 . Sinking fund

که می‌توان بدین صورت بازنویسی کرد:

$$\delta\left[\frac{\partial\pi}{\partial t}\{(1+r)^t-1\}-\pi(1+r)^t\ln(1+r)\right]=0 \qquad (۱۱-۷)$$

که $\delta \neq 0$ است. بنابراین

$$\frac{\partial\pi}{\partial t}\{(1+r)^t-1\}-\pi(1+r)^t\ln(1+r)=0 \qquad (۱۲-۷)$$

با تقسیم طرفین بر $\{(1+r)^t-1\}$ و جایگزینی δ به جای $l_n(1+r)$ در تنزیل پیوسته یا ربح مرکب پیوسته، می‌توان (۷-۱۲) را بدین‌گونه بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial\pi}{\partial t}(1+r)^{-t}=\frac{\pi\delta}{(1+r)^t-1}=\pi^* \qquad (۱۳-۷)$$

که شرطی برای حداکثر جریان سود در واحد زمان، به دست می‌دهد.

بنابراین، با وجود ترجیحات زمانی، حداکثر سازی سود با توجه به طول دوره تولید t انجام می‌شود، به گونه‌ای که در t، ارزش حال سود نهایی در واحد زمان، یعنی عبارت سمت چپ (۷-۱۳) برابر است با جریان سود، یعنی π^*. به همین ترتیب، می‌توان π^*، یعنی نرخ پایدار سود در واحد زمان را متناظر با ارزش حال سودهای کلی مربوط به mt دوره، بدست آورد.

اگر R و C و π برای دوره تولید به صورت زیر تعریف شده باشند.

$$R=p_y y, \qquad C=(\Sigma p_i x_i+F)(1+r)^t, \qquad \pi=R-C$$

آنگاه می‌توان (۷-۱۳) را به این صورت بیان کرد:

$$\partial[p_y y-\{(\Sigma p_i x_i+F)(1+r)^t\}]/\partial t=(1+r)^t\pi^*$$

یا

$$\frac{\partial(p_y y)}{\partial t}-\frac{\partial\{(\Sigma p_i x_i+F)(1+r)^t\}}{\partial t}=(1+r)^t\frac{\pi\delta}{(1+r)^t-1}$$

یا

$$\frac{\partial R}{\partial t}-\frac{\partial C}{\partial t}=t\,\frac{\pi}{t}\,\delta\,\frac{(1+r)^t}{(1+r)^t-1}$$

یا
$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\pi^0 t\delta(1+r)^t}{(1+r)^t - 1}$$

برای فرآیند تولید وابسته به زمان که با (۷-۴) و (۷-۵) بیان شده است ، شرط بالا برای تخصیص بهینه نهاده x_i بدین صورت در می‌آید :

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} = \frac{\partial C}{\partial x_i} + \frac{\left(\frac{\partial t}{\partial x_i}\right) \pi^0(1+r)^t \,\delta t}{(1+r)^t - 1} \qquad (۷-۱۴)$$

برای حالت معمولِ $r>0$، در جمله دوم طرف راست (۷-۱۴) ، عبارت $\frac{(1+r)^t\delta t}{(1+r)^t-1}$ بزرگتر از یک خواهد بود. بنابراین ، ترجیح زمانی، هزینه فرصت زمانی نهاده X_i و هزینه عامل نهایی‌اش را افزایش می‌دهد؛ که دست آخر، سطح نهادهٔ X_i را کاهش می‌دهد.

۷-۲ بهینه‌سازی مقید

شرایط بهینه‌سازی بدون ترجیح زمانی را وقتی تولید مقید است، به گونه‌ای که برای تحلیل بدون زمان انجام شد، می‌توان بدست آورد. برای انجام این کار، محدودیت‌ها باید در تابع هدف گنجانده شوند. فرض کنید فرآیند تولید به صورت زیر باشد :

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (۷-۱۵)$$
$$x_i = f_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (۷-۱٦)$$

که باید به طور پیوسته با محدودیت $\Sigma p_i x_i = C$ در هر دوره تولید از m دوره، اجرا شود. بنابراین، C/t یا $(\Sigma p_i x_i)/t$ بیان‌گر محدودیت در هر واحد زمان است. با گنجاندن این محدودیت در تابع هدف مربوط به یک واحد زمان، که در (۷-٦) آمده است، خواهیم داشت:

$$\pi^0 = \{p_y y - \Sigma\, p_i x_i - F\}/t + \lambda\{(\Sigma\, p_i x_i - C)/t\}$$

اکنون، با مشتق‌گیری از این تابع نسبت به x_i و λ، می‌توان $n+1$ معادله بدست آورد، که باید یک یک آنها را برابر با صفر قرار داد تا مقادیر نهاده‌های حداکثرکننده سود بدست آید.

بنابراین:

$$p_y(\partial y/\partial x_i) - p_i - (\partial t/\partial x_i)(p_y y - \Sigma\, p_i x_i - F)/t$$

$$+\lambda p_i - \lambda(\partial t/\partial x_i)(\Sigma\, p_i x_i - C)/t = 0 \qquad (۱۷-۷)$$

$$\Sigma\, p_i x_i - C = 0 \qquad (۱۸-۷)$$

λ را می‌توان از مجموعه معادلات (۷-۱۷) و (۷-۱۸) حذف کرد و n معادله بدست آورد: یعنی :

$$NMR_1/NMR_i = p_1/p_i \qquad (۱۹-۷)$$

$$x_1 = C/p_1 - \Sigma\,(p_i/p_1)x_i$$

که $i = 2, 3, \ldots, n$ می‌باشد. NMR_i بیان‌گر درآمد نهایی خالص یک واحد نهاده X_i در طول زمان می‌باشد و چنین است :

$$NMR_i = p_y\{\partial y/\partial x_i\} - p_i - \{\partial t/\partial x_i\}\{p_y y - \Sigma\, p_i x_i - F\}/t \qquad (۲۰-۷)$$

بنابراین، NMR_i همیشه برابر با صفر نیست، آنگونه که در حالت بدون محدودیت بود.

تمرین

۱-۷ زمان چگونه بر بهینه‌سازی منابع در کشاورزی تأثیر می‌گذارد؟ بحث کنید.

۲-۷ چکیده کلی روش بهینه‌سازی منابع را (مقید و نامقید) با ترجیحات زمانی و بدون ترجیحات زمانی، بیان کنید.

۳-۷ باداشتن این فرآیند تولید وابسته به زمان :

$$y = 2500 + 10x_1 - 0.2x_1^2 \qquad x_1 = t$$

و داشتن $P_y = 1$ ، $P_1 = 5$ ، $2520 =$ هزینه ثابت (F)، و این که نرخ بهره در هر واحد زمان 1.5 درصد می‌باشد؛ مقادیر بهینه نهاده X_1 را در شرایط زیر محاسبه کنید :

(۱) بدون توجه به عامل زمان ،

(۲) بدون هرگونه ترجیح زمانی و

(۳) با ترجیحات زمانی.

منابع برای مطالعه بیشتر

Dillon, John L., *The Analysis of Response in Crop and Livestock Production*, 2nd ed., Pergamon Press, Oxford, 1977, Ch. 3.

Henderson, J.M. and R.E. Quandt, *Microeconomic Theory: A Mathematical Approach*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1980, Ch. 12.

Winder, J.W.L. and G.I. Trant, "Comments on Determining the Optimum Replacement Pattern", *Journal of Farm Economics*, 43(4), 1961, pp 939-951.

فصل هشتـــم

بهینه‌سازی با ریسک و عدم اطمینان

تأثیر زمان بر بهینه‌سازی، در فصل ۷ بحث شد. بنابراین، خواننده اکنون می‌تواند به راحتی اهمیت زمان را در پیچیده کردن روشهای بهینه‌سازی، دریابد. به همین ترتیب، معرفی ریسک و عدم اطمینان، حتی بدون توجه به زمان، نیز روشهای بهینه‌سازی را پیچیده می‌کند. در این شرایط، روشهای استاندارد بهینه‌سازی تقریباً فرو می‌ریزند. با این وجود هنوز باید تصمیم‌گیری کرد. در این حالت، به جای تعیین مقادیر دقیق متغیرهای داده‌ای و ستاده‌ای، فقط می‌توان دامنه‌ای یا احتمالی برای یک مقدار معین ارائه داد.

از آن جاکه درجه نسبی برداشت و درک افراد از اطلاعات و آگاهیها و حد ریسک و عدم اطمینان از یک تصمیم‌گیرنده به تصمیم‌گیرنده دیگر فرق می‌کند، پاسخ‌های احتمالی آن‌ها نیز گوناگون است. بنابراین، هیچ روش دقیق علمی برای تعیین یگانه مقادیر بهینه متغیرها در شرایط ریسک و عدم اطمینان، نمی‌تواند وجود داشته باشد. متأسفانه اقتصاددانان هنوز موفقیتی در این زمینه بدست نیاورده‌اند. تلاش آنها به جستجو در تاریکی می‌ماند. چشم‌انداز موفقیت در آینده نزدیک نیز امیدبخش نیست. با آن که تلاشهای فراوانی نیز در این زمینهٔ دشوار چهره می‌بندد.

اقتصاددانان اغلب از انجام تحلیل‌های اقتصادی با توجه به ریسک و شرایط عدم اطمینان، پرهیز می‌کنند. دلیل اصلی آن، این است که داده‌ها و اطلاعات لازمی که در دسترس آنهاست، برای تحلیل، بسیار ناکافی هستند. با این وجود، شرایط ریسک و عدم اطمینان، از جملهٔ بدیهای غیرقابل اجتنابِ این جهان هستند. در این فصل از شرایط بهینه‌سازی در چنین

وضعیت‌هایی، گفتگو می‌شود.

برای راحت‌تر کردن بحث، لازم است دو ساده‌سازی انجام دهیم. نخست، واژه‌های «ریسک» و «عدم اطمینان»[1] را به جای هم بکار می‌بریم، بدون آن که تمایزی میان آنها قائل شویم، و آنها را برای توصیف وضعیتی به کار می‌بریم که هیچ نتیجه قطعی یگانه‌ای نمی‌توان از آن گرفت. چنین وضعیتی را می‌توان با توزیع احتمال، بیان کرد. دوم این که به ریسک و عدم اطمینان، تنها در یک چارچوب بی‌زمان توجه می‌شود. این باعث می‌شود که از پیچیدگی‌های زیادی که ناشی از ورود زمان به عنوان یک متغیر در تابع تولید است، اجتناب کنیم.

۸-۱ اجزاء ریسک

اجزاء ریسک در یک تابع تولید را با نوشتن معادله سود، بهتر می‌توان درک کرد.

$$\pi = p_y y - \Sigma p_i x_i - F \qquad (۸-۱)$$

در (۸-۱)، π بازده خالص یا سود است؛ F هزینهٔ ثابت است؛ y و x_i، $(i=1\ ,2\ ,\ ...\ ,\ n\ ,\ n+1\ ,\ n+2\ ,\ ...\ ,\ m\ ;\ m+1\ ,\ m+2\ ,\ ...\ ,\ \ l)$، مقادیر ستاده و iاُمین نهاده می‌باشند: P_y و P_i قیمت هر واحد ستاده و نهاده iاُم هستند، به گونه‌ای که برای متغیرهای تصمیم‌گیری[2]، P_i بزرگتر از صفر $(i = 1, 2, ...\ , n)$، و برای متغیرهای از پیش تعیین شده[3] و متغیرهای نامعین[4]، P_i مساوی صفر $(i = n+1\ , n+2\ , ...\ , l)$ می‌باشد.

بررسی (۸-۱) نشان می‌دهد که عدم اطمینان در π ممکن است ناشی از یک یا چند عامل زیر باشد:

۱ـ ریسک قیمت:

با توجه به اجزاء معادله (۸-۱)، عامل این نوع عدم اطمینان در π می‌تواند P_y یا P_i، یا هردوی آنها باشد. P_i عموماً در زمان تصمیم‌گیری، برای تصمیم‌گیرنده، به طور قطعی مشخص است. بنابراین فرض می‌شود که عدم اطمینان ناشی از P_y، بسیار مهم‌تر است.

---

1 . *Uncertainty*

2 . *Decision variables*

3 . *Predetermined variables*

4 . *Uncertain variables*

سیاست‌گذاری‌های دولتی در بسیاری از کشورها، در مواقع بسیاری، این انواع ریسک را در کشاورزی، یا اساساً حذف می‌کنند یا حداقل کاهش می‌دهند.

۲ـ ریسک محصول:

در این حالت، عدم اطمینان در جزء y معادله (۸-۱) وجود دارد. این جزء ریسک، بی‌گمان نه تنها در کشوری همچون هند، بلکه در بسیاری از کشورهای توسعه یافته نیز مهمترین جزء ریسک به شمار می‌رود. یگانه راه برای کاهش این ریسک، برنامه بیمه محصول می‌باشد.

این نوع عدم اطمینان، ناشی از اثر زیرمجموعه متغیرهای کنترل نشده و نامعین x_{m+1} , x_{m+2} , ... , x_l در تابع تولید می‌باشد:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n; x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_m; x_{m+1}, \ldots, x_l) \qquad (۸-۲)$$

که y را می‌توان بازدهی محصول گرفت. از آن‌جا که x_{m+1} , x_{m+2} , ... , x_l، یعنی مقادیر متغیرهای نامعین، ناشناخته هستند، y را نمی‌توان با اطمینان تعیین کرد. اما می‌توان یک توزیع احتمال ذهنی برای y مشخص کرد. درباره اثر متغیرهای نامعین بر y، می‌توان دو حالت مجزا را در نظر گرفت:

(الف) زیرمجموعه متغیرهای نامعین، اثر مستقلی بر y دارند.

در چنین وضعیتی، تولیدهای نهایی و مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم‌گیری، یعنی X_1 , X_2 , ... , X_n، همانند مقادیری هستند که بدون درنظر گرفتن ریسک محصول بدست می‌آیند.

(ب) متغیرهای نامعین دارای تأثیر متقابل با متغیرهای تصمیم‌گیری هستند.

این مسأله، بر تولیدهای نهایی و مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم‌گیری اثر می‌گذارد. بنابراین، برای محاسبه مقادیر بهینه نهاده‌ها، ریسک محصول باید در تابع تولید گنجانده شود. این وضعیت برای یک تصمیم‌گیرنده در کشاورزی، واقعی‌تر است.

۳ـ ریسک در مقدار متغیرهای تصمیم‌گیری:

ممکن است به دلایل گوناگون، در مقادیر نهاده‌های کنترل شده x_i، $(i=1,2,...,n)$ در رابطه (۸-۱) ریسکی وجود داشته باشد.

۴ـ ریسک در هزینه ثابت :

این ریسک نیز می‌توان ناشی از تأثیر F، یعنی هزینه ثابت در (۸-۱) باشد.

تجربه نشان می‌دهد که ریسک‌های نوع سوم و چهارم را می‌توان با احتیاط نادیده گرفت. بنابراین، باید توجه‌مان را تنها به ریسک ناشی از محصول و قیمت محصول معطوف کنیم.

در (۸-۱) ، توزیع احتمال مشترک P_y و y، و بنابراین توزیع احتمال π، مشروط به مقادیر متغیرهای تصمیم‌گیری، $x_1 , x_2 , \dots , x_n$، خواهد بود. بنابراین :

$$p(\pi \mid x_1, x_2, \dots, x_n) = p\{(p_y y - \Sigma p_i x_i - F) \mid x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (۸-۳)$$

اما $\Sigma p_i x_i$ و F برای مجموعه معینی ازمقادیر $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ ثابت هستند. بنابراین، توزیع احتمال $P(\pi \mid x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ و توزیع احتمال $h(p_y y \mid x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ از یک شکل خواهند بود. اما میانگین توزیع اول نسبت به دومی، به اندازه $\Sigma p_i x_i + F$ کوچکتر خواهد بود.

بنابراین، محاسبه مقادیر بهینه $X_1 , X_2 , \dots , X_n$، بستگی به انواع توزیع‌های احتمال جانشین، مربوط به سود یا مربوط به درآمد ناخالص، دارد. بدین ترتیب، ملاکی لازم می‌آید تا توزیع‌های احتمال جانشین، رتبه بندی شوند.

۸-۲ ملاک تصمیم‌گیری

چندین ملاک تصمیم‌گیری برای مشخص‌کردن شرایط عمل با ریسک و عدم اطمینان پیشنهاد شده است. اما هیچ کدام از آنها تاکنون کاملاً رضایت‌بخش نبوده است. یا کاربرد فراگیری پیدا نکرده است. برخی از مهمترین ملاکهای تصمیم‌گیری در شرایط ریسک، در زیر بحث می‌شود.

۱ـ تنزیل ریسکی[1]

کاربرد این ملاک برای تعیین محصولات یا قیمت‌های احتمالی، در یک تحلیل

1 . *Risk Discounting*

اقتصادیِ بیشتر سنتی، می‌باشد. این روش، پیش‌فرض می‌کند که محصولات / قیمت‌ها ممکن است در مقایسه با آن چه در زمان تصمیم‌گیری مشاهده شده‌اند، نامطلوب شوند. اما چنین روشی، کلاً اختیاری است و پایه‌ای منطقی ندارد.

ببینیم کاربرد این روش در تصمیم‌گیری چیست. فرض کنید تصمیمات مختلفی می‌توان گرفت که نتایج آنها با درآمد خالص اندازه‌گیری می‌شود، که درآمد خالص مساوی درآمد منهای هزینه است. باز فرض می‌شود که درآمد، یک متغیر تصادفی است و میانگین توزیعش معلوم است. تصمیم‌گیرنده‌ای که این ملاک را به کار می‌برد، پیش از محاسبهٔ درآمد خالص بااستفاده از یک عامل تصحیح، این میانگین را اصلاح می‌کند. پراکندگی توزیع درآمد و نگرش تصمیم‌گیرنده به ریسک، تعیین کننده اندازه و جهت این عامل تصحیح است. هرچه پراکندگی توزیع بیشتر باشد، مقدار مطلق این عامل تصحیح بزرگتر است. در حالیکه عامل تصحیح برای افرادِ ریسک‌گریز، منفی است، همین عامل برای ریسک‌پذیران، مثبت است. در هر دو حالت، این ملاک به تصمیم‌گیرنده کمک می‌کند تا برای هر کدام از تصمیمهای جانشینی که می‌تواند بگیرد، یک مقدار یگانه‌ای برای درآمد بدست آورد. سرانجام، باتوجه به این درآمدها، مقادیر درآمد خالص هرکدام از این تصمیمات مختلف، به دست می‌آید. در آخر، برنامه‌ای انتخاب می‌شود که درآمد خالص آن حداکثر باشد.

روشن است که تصمیم‌گیرندگان مختلفی که با شرایط عدم اطمینان یکسانی روبرو هستند، ممکن است یکسان عمل نکنند. این روش تنها زمانی مفید است که ملاک تصمیم‌گیری - یعنی درآمد، در مثال ما به صورت یک مقدار یگانه بیان شده باشد و متغیرهای تصادفی موجود که در تعریف ملاک وارد می‌شوند (مثل درآمد، در این مثال) نیز مقدار یگانه‌ای داشته باشند.

استفاده از این ملاک، کاربرد محدودی داشته است، به گونه‌ای که تکنیک‌های پذیرفته‌ای وجود ندارند که تنزیل ریسک را به کار گرفته باشند. تصمیم‌گیرنده، نه هیچ نشانه‌ای از رفتارش و نه هیچ نشانه‌ای از اندازه عامل تصحیح، بدست نمی‌دهد.

۲ـ ارزش انتظاری[1]

یک راه پرهیز از کاستی‌هایی که در کاربرد ملاک تنزیل ریسک وجود داشت، این است که ملاک ارزش انتظاری را به کار ببریم. این روش بیانگر بی‌طرفی در ریسک است.

---

1 . *Expected Value*

این ملاک را با کمک مثال ساده‌ای نشان می‌دهیم. یک متغیر تصادفی، X را در نظر بگیرید که می‌تواند مقادیر ناپیوسته زیر را همراه با احتمالهای P_i مربوطه بگیرد، به گونه‌ای که $\Sigma_i P_i = 1$. همچنین عواید پولی حاصل از هر وضعیت، S_i، نیز در زیر داده شده است:

X_i	p_i	S_i
1	0.1	−10
2	0.2	0
3	0.3	+10
4	0.2	+20
5	0.2	+40

این مثال را چشم‌انداز تصادفی[1] A_1 نامگذاری می‌کنیم. ارزش انتظاری A_1، یعنی E_{A1} برابر است با:

$$E_{A_1} = \sum_{i-1}^{5} p_i S_i$$
$$= 0.1(-10) + 0.2(0) + 0.3(10) + 0.2(20) + 0.2(40)$$
$$= 14$$

اکنون یک چشم‌انداز تصادفی دیگر، مثل A_2 را در نظر بگیرید که:

$$E_{A_2} = \sum_{i=1}^{5} p_i S_i = 12$$

با معیار حداکثرسازی ارزش انتظاری، برنامه A_1 بر برنامه A_2 ترجیح دارد. بنابراین، به عنوان فرمول یک قاعده، A_1 بر A_2 مرجح است، اگر:

$$E_{A_1} > E_{A_2}$$

این را به راحتی می‌توان به حالت عمومی شامل n چشم‌انداز، گسترش داد. یعنی چشم‌انداز A_i بر چشم‌انداز A_j مرجح است ، اگر:

$$E_{A_i} > E_{A_j}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j$$

ارزش انتظاری ترکیبی از دو یا چند چشم‌انداز، برابر است با مجموع ارزشهای انتظاری تکی آنها. بنابراین، این ملاک را برای مقایسه یک مجموعه از چشم‌اندازها با

1 . Chance prospect

مجموعه‌ای دیگر نیز می‌توان مورد استفاده قرار داد.

این ملاک، از کاستی‌های زیر رنج می‌برد :

(الف) محاسبه ارزش انتظاری و استفاده از ملاک حداکثرسازی ارزش انتظاری، مبتنی بر قانون اعداد بزرگ است، که ارزش انتظاری را در بلندمدت برای یک مقدار نیمه‌معین[1] ، کاهش می‌دهد. در شرایط دنیای واقعی، معمولاً برآورده شدن فروض این قانون دشوار است.

(ب) این ملاک در توضیح مقادیر حدی شکست می‌خورد. برخی چشم‌اندازهای تصادفی وجود دارند که ارزش انتظاری آنها ممکن است از نظر تئوری، بی‌نهایت باشد، با این حال، هیچ فرد معقولی این چشم‌انداز را به دریافت قطعیِ یک مبلغ قابل توجه، ترجیح نمی‌دهد. مثال کلاسیک این مسأله را برنولی[2] با یک بازی نشان داده است. که اکنون به عنوان بازی سَنت پترزبورگ[3] شناخته شده است.

۳ـ معادلهای قطعی[4]

محور این روش تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان، فرض مهم رفتارِ ریسک‌گریزی است. این روش، دیگر فرض نمی‌کند که ترجیحات، نسبت به پول، خطی هستند.

تصمیم‌گیرنده‌ای را در نظر بگیرید که با یک توزیع احتمال مربوط به درآمد خالص حاصل از یک فعالیت معین، روبه رو است. فرض می‌شود این فرد به دنبال ایجاد توازنی میان درآمد خالص انتظاری و یکی از شاخص‌های آماری پراکندگی، است. می‌توان میانگین توزیع احتمال (E) و واریانس (V) آن را برای بیان ارزش انتظاری و پراکندگی درآمد خالص به کار برد. اکنون می‌گوییم این کارگزار اقتصادی، ریسک گریز است، اگر او برای یک واریانس معین، میانگین بزرگتر را به میانگین کوچک‌تر ترجیح دهد. به زبان دیگر، او برای یک مقدار میانگین معین، واریانس کوچک‌تر را به واریانس بزرگ‌تر، ترجیح می‌دهد. اکنون بر پایه‌ایی فروض می‌توانیم برای میانگین (E) و واریانس (V) مجموعه‌ای از منحنی‌های

---

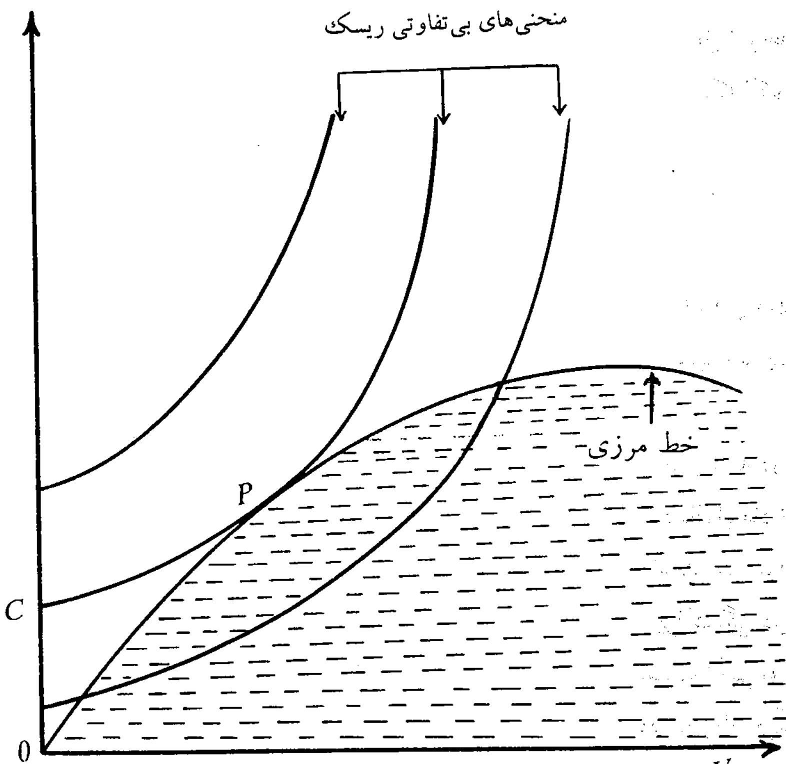
1 Quasi - certain magnitude

2 . Bernoulli

3 . St. Petersburg game

4 . Certainty Equivalents

بی‌تفاوتی ریسک[1] را معرفی کنیم ـ آن‌گونه که در شکل ۸ـ۱ نشان داده شده است ـ با این فرض که با افزایش واریانس، افزایش جبران‌کنندهٔ بیشتری باید در Eرخ دهد، نتیجه می‌گیرم که منحنی‌های بی‌تفاوتی ریسک، نسبت به محور V، محدب هستند. خط مرزی شکل ۸ـ۱ بیان‌گر مجموعهٔ کارایی از طرحهایی است که در برابر تصمیم‌گیرنده ریسک‌گریز قرار دارد. طرحی که در شکل، با نقطه P مشخص شده است، طرح بهینه است و نقطه C،که در آن $E = OC$، مبلغ معادل قطعی این طرح بهینه است، زیرا در آن نقطه $V = O$. نقطه بهینه با تغییر مجموعه منحنی‌های بی‌تفاوتی ریسک، تغییر می‌کند.



شکل (۸-۱) ، منحنی‌های بی‌تفاوتی ریسک ، E-V

این روش نیز برای تحلیل شرایط عدم اطمینان، محدودیت‌های خودش را دارد.

1 . *Risk - indifference curves*

نخست این که روش انتخاب نقطه P بر روی خط مرزی، قابل ایراد است. خودِ فرض اساسی ریسک گریزی و نرخ نهایی جانشینی فزاینده میان V و E، که متضمن منحنی‌های بی‌تفاوتی ریسک محدّب است و مسأله خط مرزی، همگی سؤال برانگیزند. به نظر می‌رسد تا کنون هیچ‌گونه کوششی به منظور یافتن روشهایی برای استنتاج مجموعه‌ای از منحنی‌های بی‌تفاوتی ریسک نشده باشد. فراتر از اینها راهی برای انتخاب هیچ کدام از طرحهای روی خط مرزی وجود ندارد. ایراد دیگری که به این روش می‌شود، این است که استفاده کننده از این روش معمولاً جنبه مجموعه‌ای تصمیم‌گیری اقتصادی را فراموش می‌کند. این روش به بررسی مسأله انتخاب از میان فرصت‌های از هم جدا، می‌پردازد. در حالیکه در واقعیت، مسأله انتخاب از میان مجموعه‌ها، یا انتخاب ترکیب از چندین فرصت، مطرح است.

این نکته درستی است که به طور کلی ریسک گریز پنداشتن همه، یک فرض افراطی است که درباره نگرش افراد به ریسک انگاشته می‌شود. اما این کاستی را می‌توان با در نظر گرفتن ملاک حداکثرسازی مطلوبیت انتظاری، جبران کرد.

۴ـ نظریه مطلوبیت:

استفاده از روش نظریه مطلوبیت مبتنی بر قضیه مطلوبیت انتظاری است. این روش از نظر معیارهای موجود، قابل قبول و به عنوان یک پایه منطقی برای انتخاب در شرایط عدم اطمینان شناخته شده است. دراین روش، نتیجه دارای ریسک بر اساس مطلوبیت انتظاری ارزیابی می‌شود.

برنولی به جای ملاک منفعت پولی انتظاری برای انجام انتخاب بهینه، ملاک دیگری پیشنهاد کرده است. این ملاکِ جایگزین، مطلوبست انتظاری یا انتظار اخلاقی[1] نامیده شده است. اما او روشی برای اندازه گیری مطلوبیت ارائه نمی‌کند. با این وجود، توسعه تئوری جدید مطلوبیت، ناشی از این روشنگری او بود. ساویج[2] با توجه به شالوده‌ای که فون‌نیومن و مورگنشترن[3] تدارک دیده بودند، در اوایل دهه ۱۹۵۰ این تئوری جدید را تکمیل و معرفی کرد. مطلوبیت فون‌نیومن ـ مورگنشترن یک مقدار روانی، همچون مفهوم مطلوبیت عددی[4] اقتصاددانان نیست، و آن را فقط می‌توان در انتخاب شرایطی که با احتمال همراه است، به کار

---

1 . *Moral expectation*

2 . *L.T. Savage*

3 . *Von Neumann - Morgenstern*

4 . *Cardinal utility*

برد.

ساختن شاخص مطلوبیت فون‌نیومن ـ مورگنشترن

شاخص مطلوبیت فون نیومن ـ مورگنشترن بر پایه پنج اصل موضوع درباره رفتار تصمیم‌گیرنده، ساخته می‌شود که در زیر بررسی می‌کنیم.

۱ـ رتبه‌بندی کامل[1] :

برای دو گزینه A_1 و A_2، یکی از این موارد باید وجود داشته باشد: یا تصمیم‌گیرنده A_1 را به A_2 ترجیح می‌دهد، یا او A_2 را به A_1 ترجیح می‌دهد و یا میان آن دو بی‌تفاوت است. ارزیابی تصمیم‌گیرنده از گزینه‌ها، قابل تسرّی است، یعنی اگر او A_1 به A_2 و A_2 را به A_3 ترجیح می‌دهد، آنگاه او A_1 را به A_3 ترجیح می‌دهد.

۲ـ پیوستگی[2] :

وضعیتی را در نظر بگیرید که در آن A_1 بر A_2 و A_2 بر A_3 مرجح است. آنگاه بر اساس این اصل، یک احتمال P وجود دارد، $0<P<1$، به گونه‌ای است که تصمیم‌گیرنده میان A_2 مطمئن و یک بلیط بخت‌آزمایی $L = (P , A_1 , A_3)$، بی‌تفاوت خواهد بود.

۳ـ استقلال[3] :

فرض کنید فردی میان A_1 و A_2 بی‌تفاوت باشد و A_3 در میان گزینه‌ها نباشد. اگر یک بلیط بخت‌آزمایی L_1 دارای پیشامدهای (نتایج) A_1 و A_3، با احتمالهای P و $(1-P)$، باشد و بلیط بخت‌آزمایی دیگر، L_2، دارای پیشامدهای A_2 و A_3 با همان احتمال‌ها باشد، فرد میان L_1 و L_2 بی‌تفاوت خواهد بود. به همین ترتیب، اگر او A_1 را به A_2 ترجیح دهد، L_1 را به L_2 ترجیح خواهد داد.

۴ـ احتمال نابرابر[4] :

فرض کنید تصمیم گیرنده A_1 را به A_2 ترجیح می‌دهد و گیریم $L_1 = (P_1,A_1,A_2)$ و $L_2 = (P_2,A_1,A_2)$ باشد. او L_1 را به L_2 ترجیح می‌دهد، اگر و فقط اگر $P_1>P_2$.

---

1 . Complete - ordering

2 . Continuity

3 . Independence

4 . Unequal probability

۵- بخت‌آزمایی مرکب[1] :

هنگامی بخت‌آزمایی مرکب رخ می‌دهد که جوایز هر بخت‌آزمایی، بلیط‌های بخت‌آزمایی باشد. فرض کنید $L_1 = (P_1, A_1, A_2)$ و $L_2 = (P_2, L_3, L_4)$، که در آن $L_1 = (P_3, A_1, A_2)$ و $L_4 = (P_4, A_1, A_2)$ باشد؛ آنگاه L_2 معادل L_1 است، اگر $P_1 = P_2P_3 + (1 - P_2)P_4$. با دانستن L_2، احتمال پیش‌آمدن L_3 برابر با P_2 است. بنابراین، احتمال پیش‌آمدن A_1 از طریق L_2 برابر با P_2P_3 می‌باشد. به همین ترتیب، احتمال L_4 برابر با $(1-P_2)$ است و احتمال A_1 از طریق L_4، برابر با $(1-P_2)P_4$ می‌باشد.

اصول (۱) تا (۵) راکه اساساً برای وضعیتهای دارای دو پیشامد، بسط داده شده است، می‌توان به راحتی به مواردی که دارای تعداد زیادی پیش آمده است، گسترش داد.

برای فردی که رفتارش منطبق با این پنج اصل موضوع فون‌نیومن ـ مورگنسترن است، می‌توان شاخص مطلوبیت عددی را به گونه‌ای که اکنون بیان می‌شود، ساخت. فرض کنید تصمیم‌گیرنده‌ای بایک چشم‌انداز تصادفی رو به رو است: او ممکن است با احتمال ۰/۵۰ ، صفر روپیه (پیشامد A_1) ، یا با احتمال ۰/۵۰ ، هزار روپیه (پیشامد A_2) دریافت کند. فرض کنید صفر روپیه دارای صفر واحد لذت[2] (کام) باشد و هزار روپیه، دارای صد واحد کام. بنابراین، درباره پیشامدهای A_1 و A_2، یعنی بدست آوردن صفر روپیه یا هزار روپیه، یک بخت‌آزمایی (مثلاً L_1) وجود دارد. مطلوبیت انتظاری این بخت آزمایی $L_1(P, A_1, A_2)$ برابر است با :

$$E[U(L_1)] = PU(A_1) + (1 - P)U(A_2)$$

اما، این جا $P = ۰/۵۰$ و داریم :

$$U(A_1) = U(0) = 0$$
$$U(A_2) = U(1{,}000) = 100$$

بدین ترتیب ،

$$E[U(L_1)] = .50(0) + .50(100) = 50$$

اکنون این سؤال برای تصمیم‌گیرنده پیش می‌آید که معادل قطعی بخت‌آزمایی

1 . Compound Lottery
2 . Utile

$L_i(0.5\ ,\ A_k,\ A_i)$، که $k \neq j$، چیست؟ در این مرحله باید این پرسش مطرح شود: «اگر شما یک شانس پنجاه ـ پنجاه برای بدست آوردن صفر روپیه یا هزار روپیه داشته باشید، و در برابر آن، پیشامد قطعیِ بدست آوردن x روپیه وجود داشته باشد، کدام یک از این دو انتخاب را برخواهید گزید؟» در این جا، هدف این است که آن مقداری از x مشخص شود که فرد را میان پیشامد بخت‌آزمایی پنجاه ـ پنجاه برای بدست آوردن صفر یا هزار روپیه، و پیشامد قطعیِ x روپیه، بی‌تفاوت می‌سازد. گیریم، در این مورد، x مساوی ۲۰۰ روپیه باشد. آنگاه مطلوبیت فرد برای ۲۰۰ روپیه، پنجاه واحد می‌باشد ـ یعنی همان مطلوبیت اقتصادی مربوط به بخت‌آزمایی پنجاه ـ پنجاه برای بدست آوردن صفر روپیه یا هزار روپیه. بنابراین با توجه به تابع مطلوبیت، سه نقطه بدست می‌آید:

$$\text{(i) } U(0) = 0, \quad \text{(ii) } U(200) = 50, \quad \text{(iii) } U(1{,}000) = 100$$

در این روش، زنجیره‌ای از بخت آزمایی‌های پنجاه ـ پنجاه ساخته می‌شود که هر کدام از آنها متضمن یک مقدار پایه و مقدار معادل قطعیِ حاصل از مجموعه شرایط قبلی می‌باشد. این روند رو به رو کردن تصمیم گیرنده با چشم‌اندازهای انتخابی ساده، آن قدر ادامه می‌یابد تا منحنی مطلوبیت در دامنه صفر روپیه و ۱۰۰۰ روپیه، کاملاً مشخص شود. با استفاده از همین روش حتماً می‌توان تابع مطلوبیت را نیز گسترش داد.

اکنون قضیه مطلوبیت انتظاری را می‌توان بدین گونه بیان کرد: برای تصمیم گیرنده‌ای که ترجیحاتش با اصول موضوعهٔ رتبه‌بندی، پیوستگی، استقلال، احتمال نابرابر، و بخت‌آزمایی مرکب سازگار است، این موارد وجود دارد: (الف) یک توزیع احتمال یگانه‌ای برای پیشامدهای مربوط به راه‌حلهای انتخابی دارای ریسک، و (ب) یک تابع مطلوبیت U که با اندازه گیری کامیابی حاصل از هر راه حلی دارای ریسک، یک شاخص مطلوبیت یگانه‌ای بدست می‌دهد.

هنگامی که احتمالات ذهنی، از قانونِ معمول احتمال تبعیت می‌کند، تابع مطلوبیت U دارای ویژگیهای زیر است:

(۱) اگر توزیع احتمال P_1 بر توزیع P_2 مرجح باشد، آنگاه شاخص مطلوبیت P_1 بزرگ‌تر از شاخص مطلوبیت P_2 خواهد بود و برعکس. این بدین مفهوم است که $U(P_1)>U(P_2)$؛ یا بر عکس، اگر $U(P_1)>U(P_2)$، آنگاه P_1 بر P_2 مرجح است.

(۲) مطلوبیت یک چشم‌انداز تصادفی، عبارت است از مقدار مطلوبیت انتظاری

آماری‌اش. بنابراین، اگر A، چشم‌انداز تصادفی است، با مجموعه‌ای از پیشامدها $\{a\}$، که بر اساس توزیع احتمال $P(a)$ توزیع شده است، آنگاه مطلوبیت A به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$U(A) = E[U(A)] \tag{۸-۴}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} U(a)p(a)\, d(a) \tag{۸-۵}$$

بنابراین، (۸-۴) و (۸-۵) بیان‌گر آنند که برای انجام یک انتخاب، فقط میانگین یا ارزش انتظاری مطلوبیت، مناسب است. ارزش انتظاری مطلوبیت، میانگین، واریانس، چولگی و دیگر شاخص‌های توزیع احتمال $P(a)$ را به حساب می‌آورد.

(۳) مطلوبیت با یک مقیاس اختیاری اندازه‌گیری می‌شود، که مثلاً همانند مقیاسهای مختلف اندازه‌گیری دمای هوا، یک اندازه نسبی است. این مسأله، وقتی که تابع مطلوبیت U فقط برای یک تبدیل خطی مثبت تعریف شده است، مقایسه مقادیر مطلوبیت را میان افراد، بی‌معنی می‌سازد. یعنی با داشتن تابع مطلوبیت U هر تابع دیگری همچون:

$$U^* = a_1U + a_2, \qquad a_1 > 0 \tag{۸-۶}$$

همان کار تابع اولیه را می‌کند. بنابراین، با توجه به U، تعداد بی‌نهایتی شاخص وجود دارد که بیان‌گر این شدت ترجیحات هستند.

بگذارید نشان دهیم که شدت ترجیحات با تبدیل خطی مثبتی که در (۸-۶) آمده است، تغییر نمی‌کند. نخست فرض می‌کنیم ترجیحات یک مصرف‌کننده برای پیشامدهای A_1، A_2، A_3 و A_4 به ترتیب افزایش آنها، با اعداد ۷، ۹، ۱۳ و ۲۱ مشخص شده باشد. این اطلاعات، همراه با تفاضل‌های مرتبه اول Δ_1U، در زیر آمده‌اند:

	U	Δ_1U
A_1	7	
A_2	9	2
A_3	13	4
A_4	21	8

اگر شاخص V^* به صورت زیر ساخته شود :

$$U^* = 3U + 1$$

ارقام این شاخص جدید، بـرای A_1، A_2، A_3، A_4 بـه تـرتیب ۲۲، ۲۸، ۴۰ و ٦۴ خواهند بود. ارقام این شاخص جدید، همراه با تفاضل‌های مرتبه اول آنها، $\Delta_1 U^*$، در زیر جدول بندی شده‌اند:

	U^*	$\Delta_1 U^*$
A_1	22	
A_2	28	6
A_3	40	12
A_4	64	24

به سادگی می‌توان دریافت که همانند قبل، تفاضلهای مرتبه اول بیانگر آنند که A_4 قطعاً بر A_3 ترجیح دارد، و به همین ترتیب A_3 بر A_2 و A_2 بر A_1 مرجح‌اند.

بنابراین، قضیه مطلوبیت انتظاری، ابزاری بدست می‌دهد تا چشم‌اندازهای تصادفی به ترتیبِ ترجیح، رتبه‌بندی شوند : مرجح ترین چشم‌انداز، آن است که دارای بالاترین مطلوبیت است. بنابراین، این قضیه مستلزم حداکثرسازی مطلوبیت انتظاری است.

۸-۳ بازگویی مسأله بهینه‌سازی

در شرایط عدم اطمینان، تابع هدف باید بر حسب مطلوبیت نوشته شود. بنابراین، مسأله بهینه‌سازی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد :

با داشتن تابع تولید (۸-۲)، باید مقادیر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ باید به گونه‌ای انتخاب شوند که تابع هدف مطلوبیتی

$$U = U(\pi) = E[U(\pi)]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} U(\pi) p(\pi \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) d(\pi) \qquad (۸-۷)$$

حداکثر شود، در این جا، π بیانگر سود است، آن گونه که در (۸-۱) بر یک مبنای کلی اقتصادی تعریف شده است (و نه بر مبنای یک واحد فنی)، و $P(\pi \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)$

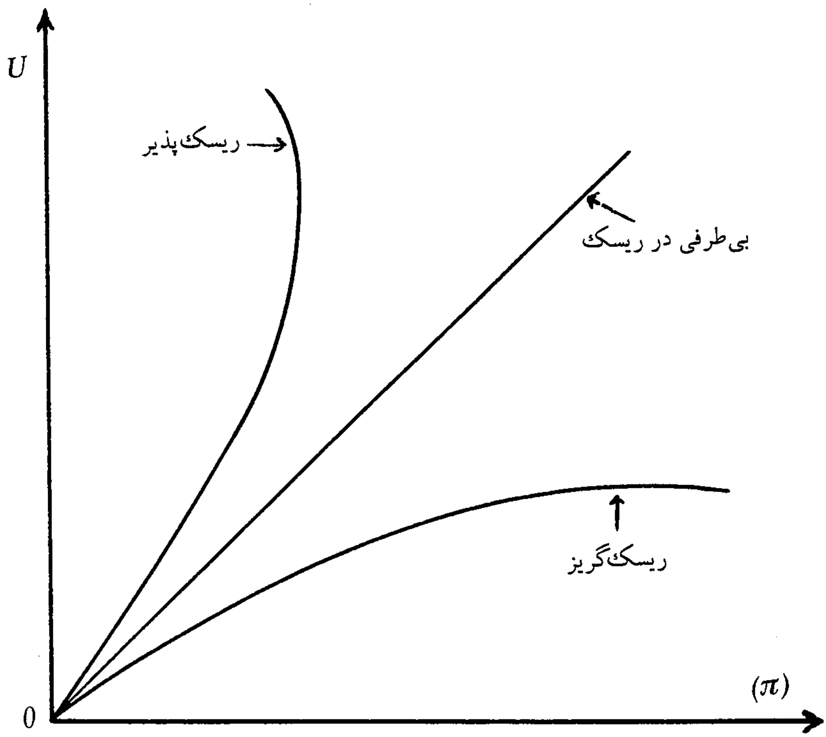
توزیع احتمالی ذهنیِ سود است، بر اساس مقادیر متغیرهای تصمیم‌گیری. برخی از جنبه‌های عمومی تابع سود مطلوبیتی، چنین است :

۱ـ $U(\pi)$ می‌تواند هر شکل جبری داشته باشد، اما باید بطور یکنواخت در دامنه مربوط به سود، صعودی باشد، یعنی $dV/d\pi>0$. این به مفهوم وجود یک مطلوبیت نهایی مثبت برای سود است. شکل درجه دومِ

$$U = \pi + a\pi^2$$

این شرط را برای $a>0$، اگر $\pi> -0.5a$؛ و برای $a<0$، اگر $\pi<-0.5a$، برآورده می‌سازد.

۲ـ $d^2u/d\pi^2$ کوچک‌تر از، بزرگتر از، یا مساوی با صفر است، بسته به این که تصمیم‌گیرند، یک ریسک گریز، یا ریسک‌پذیر یا یک بی‌طرف در ریسک باشد. تجربه نشان می‌دهد که بیشتر تصمیم‌گیرندگان، ریسک گریز هستند. شکل (۸-۲) توابع مطلوبیتی را نشان می‌دهد که بیان‌گر ریسک‌گریزی، ریسک‌پذیری، و بی‌طرفی در ریسک می‌باشند.



شکل (۸-۲) توابع مطلوبیتِ نشان‌دهندهٔ ریسک‌گریزی، ریسک‌پذیری و بی‌طرفی در ریسک

۳- برای همه توابع هدف مطلوبیتی غیرخطی، داریم :

$$U(k\pi) \neq kU(\pi)$$

که برای هر ثابتِ غیرصفر، $k \neq 1$است؛ و نیز داریم :

$$U(\pi_1 + \pi_2) \neq U(\pi_1) + U(\pi_2)$$

برای هر مقدار π_1 و π_2، به جز صفر. بعنوان یک نتیجهٔ متفاوت با تحلیل بدون ریسک، ارزیابی باید مبتنی بر سود، یعنی، $P_yY - \Sigma p_ix_i - F$، باشد. بنابراین، هزینه‌های ثابت باید مشخص شوند. یعنی، دیگر تنها ملاحظه سود ناویژه، $P_yY - \Sigma p_ix_i$، کافی نیست. به همین ترتیب، مطلوبیت باید، نه بر یک پایه فنی، آن گونه که در تحلیل بدون ریسک انجام می‌شد، بلکه بر مبنای یک منفعت کلی برای کلِ کسب و کار، اندازه گیری شود. بنابراین، چنین انگاشته می‌شود که (۸-۱) بیان‌گر یک منفعت کلی اقتصادی است و به همین ترتیب است تابع هدفِ مطلوبیتیِ (۸-۷).

۴- تابع هدفِ مطلوبیتی، صرفاً توصیف‌کننده ترجیحات تصمیم‌گیرنده است. آن را می‌توان به عنوانِ درست یا غلط، کارا یا ناکارا، طبقه‌بندی کرد.

۵- با گرفتن امید ریاضی‌های یک بسط سری تیلور[1]، تابع هدف مطلوبیتیِ انتظاری (۸-۷) رامی‌توان به عنوان تابعی از گشتاورهای سود بیان کرد، یعنی :

$$U = g\{E(\pi),\ V(\pi),\ S(\pi),\ \ldots\} \qquad (۸-۸)$$

که $E(\pi)$، $V(\pi)$، $S(\pi)$، ... بیان‌گر میانگین، واریانس، چولگی و دیگر گشتاورهای مرتبه بالاترِ حولِ میانگین سود هستند. معمولاً در یک چنین تحلیلی، تنها ملاحظه گشتاورهای مرتبه اول و دوم سود، یا حداکثر، گشتاور مرتبه سود سوم، کافی است.

---

1 . *Taylor series expansion*

۸-۴ بهینه‌سازی در شرایط عدم اطمینان

برای آشنا کردن خواننده با اثر ریسک بر شرایط بهینه‌سازی، و بنابراین، اثر آن بر مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم‌گیری، در این جا مثال ساده‌ای را بررسی می‌کنیم، یعنی حالت یک متغیر تصمیم‌گیری، بدون هیچ‌گونه قیدی، جزئیات حالت‌های پیچیده‌تر که در برگیرنده چندین متغیر تصمیم‌گیری، با محدودیت و بدون محدودیت، هستند، از حوصله این کتاب بیرون است. خوانندهٔ علاقمند به این موضوعات می‌تواند به منابعی که در پایان همین فصل داده شده است، مراجعه کند. فرض کنید تابع تولید به صورت زیر باشد :

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n; x_{n+1}, \ldots, x_m; x_{m+1}, \ldots, x_l) \quad (۸-۹)$$

که تنها x_1، متغیر تصمیم‌گیری است، و $x_2, x_3, \ldots, x_m$ متغیرهای از پیش تعیین شده، و $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_l$ متغیرهای ریسکی (غیرقطعی) می‌باشند. این متغیرهای غیرقطعی، دارای رابطه متقابل با متغیر تصمیم‌گیری x_1 هستند و در نتیجه، توزیع احتمال y نسبت به x_1، شرطی خواهد بود. معادله سود مربوط به تابع تولید (۸-۹) را می‌توان چنین نوشت :

$$\pi = p_y y - p_1 x_1 - F \quad (۸-۱۰)$$

فرض می‌کنیم در (۸-۱۰)، متغیرهای P_1، x_1 و f دارای ریسک نباشند. بنابراین، ریسک، تنها در P_y یا در y، یا در هر دوی آنها وجود خواهد داشت. سود کل، π، یک متغیر تصادفی با توزیع احتمالی ذهنی $P(\pi|x_1)$ می‌باشد. اکنون، تابع هدف مطلوبیتِ مربوط به (۸-۱۰) را می‌توان چنین نوشت :

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} U(\pi) p(\pi \mid x_1)\, d(\pi) \quad (۸-۱۱)$$

برای سادگی، فرض می‌کنیم تنها پارامترهای مناسب برای ارزش‌یابی مطلوبیت، میانگین و واریانس سود باشد، بنابراین :

$$U = g[E(\pi), V(\pi)] \quad (۸-۱۲)$$

به عنوان یک شرط لازم برای حداکثر سازی U در (۸-۱۲) ، مشتق ضمنی کلیِ V نسبت به x_1را برابر با صفر قرار می‌دهیم. یعنی :

$$\frac{dU}{dx_1} = \frac{\partial U}{\partial E(\pi)} \frac{dE(\pi)}{dx_1} + \frac{\partial U}{\partial V(\pi)} \frac{dV(\pi)}{dx_1} = 0 \qquad (۸-۱۳)$$

با تقسیم هر دو طرف (۸-۱۳) بر $\frac{\partial U}{\partial E(\pi)}$، خواهیم داشت :

$$\frac{dE(\pi)}{dx_1} + \left[\frac{\partial U}{\partial V(\pi)} \Big/ \frac{\partial U}{\partial E(\pi)}\right] \frac{dV(\pi)}{dx_1} = 0 \qquad (۸-۱۴)$$

با آرایش مجدد معادله (۸-۱۴) می‌توان نوشت :

$$-\left[\frac{\partial U}{\partial V(\pi)} \Big/ \frac{\partial U}{\partial E(\pi)}\right] = \left[\frac{dE(\pi)}{dx_1} \Big/ \frac{dV(\pi)}{dx_1}\right]$$

یا

$$-\left[\frac{\partial U}{\partial V(\pi)} \Big/ \frac{\partial U}{\partial E(\pi)}\right] = [dE(\pi)/dV(\pi)] \qquad (۸-۱۵)$$

اما طرف چپ معادله (۸-۱۵) بیان‌گر نرخ جانشینی مطلوبیتِ $V(\pi)$ بـرای $E(\pi)$، یعنی RUS_{VE}[1] می‌باشد. اکنون، ملاک حداکثرسازی مطلوبیت (۸-۱۵) ، چنین خواهد شد:

$$RUS_{VE} = dE(\pi)/dV(\pi) \qquad (۸-۱۶)$$

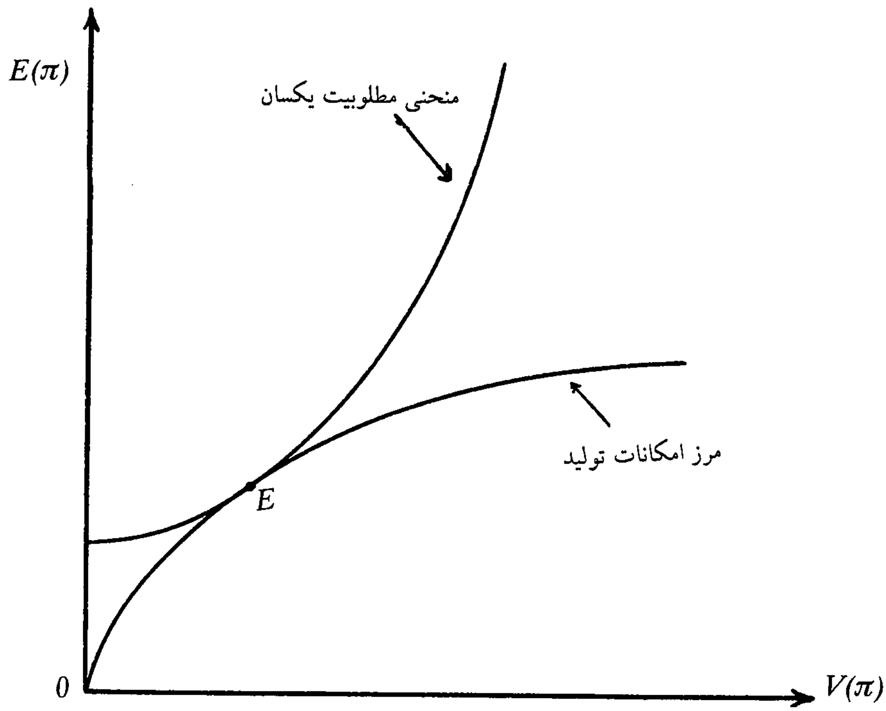
بنابراین، (۸-۱۶) اشاره دارد به برابریِ نرخ جانشینی در مطلوبیت، با نرخ جانشینی در تولید، برای $V(\pi)$ و $E(\pi)$. از نظر هندسی، این شرط مستلزم آن است که در یک فضای مربوط به میانگین و واریانس سود، منحنی مطلوبیت یکسان[2] ، با مرز امکانات تولید[3] ، مماس شود (بنگرید به شکل ۸-۳) . نقطه k در شکل (۸-۳) بیان‌گر مقدار بهینه استفاده از x_1در

1 . Rate of utility Substitution (RSU) 2 . Iso - Utility curve

3 . Frontier of production possibilities

شرایط عدم اطمینان، است.

خواننده به یاد می‌آورد که فرض کردیم ریسک، یا در P_y، یا در yو یا در هر دو، وجود دارد. به این ترتیب، این تحلیل را می‌توان به (الف) ریسک قیمت محصول، (ب) ریسک محصول، و (ج) ترکیبی از ریسک محصول و ریسک قیمت محصول، تقسیم کرد. اکنون به بررسی این سه گونه ریسک میپردازیم .



شکل (۸-۳) ـ تماس میان یک منحنی مطلوبیت یکسان و یک مرز امکانات تولید در فضای مربوط به میانگین و واریانس سود

ریسک قیمت محصول (P_y)

برای به دست آوردن مقدار بهینه x_1، نخست میانگین و واریانس π را با توجه بـه (۸-۱۰) به دست آورید. در این جا باید یادآوری کرد که yبرای یک مقدار معین x_1، ثابت است، به گونه‌ای که $v(y)$، صفر می‌باشد. بنابراین :

$$E(\pi) = yE(p_y) - p_1x_1 - F \qquad (۱۷-۸)$$

$$V(\pi) = y^2V(p_y) \qquad (۱۸-۸)$$

با گرفتن مشتق‌های مرتبه اول $E(\pi)$ و $V(\pi)$ نسبت به x_1، از روابط (۸-۱۷) و (۸-۱۸)، خواهیم داشت :

$$\frac{dE(\pi)}{dx_1} = E(p_y)\frac{dy}{dx_1} - p_1 \qquad (۱۹-۸)$$

$$\frac{dV(\pi)}{dx_1} = 2V(p_y)y\frac{dy}{dx_1} \qquad (۲۰-۸)$$

با جایگزین کردن مقادیر سمت چپ (۸-۱۹) و (۸-۲۰) در رابطه (۸-۱۴)، رابطه زیر به دست می‌آید :

$$\left[E(p_y)\frac{dy}{dx_1} - p_1\right] + \left[\frac{\partial U}{\partial V(\pi)}\Big/\frac{\partial U}{\partial E(\pi)}\right]\left[2V(p_y)y\frac{dy}{dx_1}\right] = 0$$

یا

$$E(p_y)\frac{dy}{dx_1} = p_1 - \left[\frac{\partial U}{\partial V(\pi)}\Big/\frac{\partial U}{\partial E(\pi)}\right]\left[2V(p_y)y\frac{dy}{dx_1}\right]$$

یا

$$E(p_y)\frac{dy}{dx_1} = p_1 + RUS_{VE}2V(p_y)\frac{dy}{dx_1} \qquad (۲۱-۸)$$

این، همان شرط حداکثرسازی سود است. در این جا، عبارت سمت چپ رابطه (۸-۲۱)بیان‌گر «ارزش انتظاری تولید نهایی»[1] است. و عبارت سمت راست آن رابطه، بیان‌گر هزینه عامل نهایی است که دو بخش دارد : هزینه نهایی مستقیم نهاده x_1(یعنی P_1) و هزینه

---

1 . Expected value marginal product

نهایی تغییر قیمت محصول [یعنی (dy/dx_1) RUS_{vE} $2V$ $(p_y)y$] . بنابراین ، شرط حداکثرسازی سود که در (۸-۲۱) آمده است، بیان‌گر این است که برای یک تصمیم‌گیرنده ریسک‌گریز، مقدار بهینه x_1، در مقایسه با وضعیتی که در آن P_y دارای ریسک نبود، کمتر است.

ریسک محصول (y)

اکنون وضعیتی را بررسی می‌کنیم که فقط در y عدم اطمینان وجود دارد. بنابراین، با p_yبه عنوان یک ثابت معلوم رفتار می‌کنیم. در این حالت، روش بدست آوردن مقدار بهینه x_1 چنین است : از (۸-۱۰) داریم :

$$E(\pi) = p_y E(y) - p_1 x_1 - F \qquad (۸\text{-}۲۲)$$

$$V(\pi) = p_y^2 V(y) \qquad (۸\text{-}۲۳)$$

با گرفتن مشتق‌های مرتبه اول $E(\pi)$ و $V\pi)$ نسبت به x_1، از رابطه (۸-۲۲) و (۸-۲۳)، بدست می‌آوریم :

$$\frac{dE(\pi)}{dx_1} = p_y \frac{dE(y)}{dx_1} - p_1 \qquad (۸\text{-}۲۴)$$

$$\frac{dV(\pi)}{dx_1} = p_y^2 \frac{dV(y)}{dx_1} \qquad (۸\text{-}۲۵)$$

با جایگزین کردن (۸-۲۴) و (۸-۲۵) در معادله (۸-۱۴)، خواهیم داشت :

$$\left[p_y \frac{dE(y)}{dx_1} - p_1\right] + \left[\frac{\partial U}{\partial V(\pi)} \Big/ \frac{\partial U}{\partial E(\pi)}\right]\left[p_y^2 \frac{dV(y)}{dx_1}\right] = 0$$

یا

$$p_y \frac{dE(y)}{dx_1} = p_1 - \left[\frac{\partial U}{\partial V(\pi)} \Big/ \frac{\partial U}{\partial E(\pi)}\right]\left[p_y^2 \frac{dV(y)}{dx_1}\right]$$

یا

$$p_y \frac{dE(y)}{dx_1} = p_1 + RUS_{VE}\left[p_y^2 \frac{dV(y)}{dx_1}\right] \qquad (۸\text{-}۲۶)$$

رابطه (۸-۲۶) بیانگر شرط برای بدست آوردن مقدار بهینه نهادهٔ x_1، در شرایط وجود ریسک محصول است. این رابطه نشان می‌دهد که «ارزش انتظاری تولید نهایی» (یعنی عبارت سمت چپ) برابر است با هزینه عامل نهایی (P_1) به علاوه یک هزینه ناشی از ریسک محصول (یعنی جمله دوم عبارت سمت راست). همانند حالت پیشین، که ریسک قیمت محصول وجود داشت، این جا نیز مقدار بهینه x_1 برای یک تصمیم‌گیرندهٔ ریسک گریز، در مقایسه با وضعیتی که ریسک محصول وجود ندارد، کمتر است.

ترکیب ریسکِ محصول (y) و ریسکِ قیمت محصول (P_y)

اکنون به بررسی حالت پیچیده‌تری می‌پردازیم که در آن، بطور همزمان، ریسک y و ریسک p_y وجود دارد. در این جا فرض شده است که برای تصمیم‌گیرنده منفرد، p_y و y از نظر آماری مستقل هستند. اکنون اثر این دوگونه ریسک را بر مقدار بهینه x_1 بررسی می‌کنیم.

همانند قبل، میانگین و واریانس π را از (۸-۱۰) بدست می‌آوریم. بنابراین،

$$E(\pi) = E(p_y)E(y) - p_1x_1 - F \tag{۲۷-۸}$$

$$V(\pi) = [E(p_y)]^2V(y) + [E(y)]^2V(p_y) + V(p_y)V(y) \tag{۲۸-۸}$$

با گرفتن مشتق‌های مرتبه اول $E(\pi)$ و $V(\pi)$ نسبت به x_1، از رابطه‌های (۸-۲۷) و (۸-۲۸)، داریم:

$$\frac{dE(\pi)}{dx_1} = \left\{E(p_y)\frac{dE(y)}{dx_1}\right\} - p_1 \tag{۲۹-۸}$$

$$\frac{dV(\pi)}{dx_1} = [\{E(p_y)\}^2 + V(p_y)]\left\{\frac{dV(y)}{dx_1}\right\} + 2\{V(p_y)E(y)\}\left\{\frac{dE(y)}{dx_1}\right\} \tag{۳۰-۸}$$

اکنون با جایگزین کردن مقادیر $dE(\pi)/dx_1$ و $dV(\pi)/dx_1$ از (۸-۲۹) و (۸-۳۰)، در معادله (۸-۱۴)، داریم:

$$\left[E(p_y)\frac{dE(y)}{dx_1} - p_1\right] + \left[\frac{\partial U}{\partial V(\pi)}\Big/\frac{\partial U}{\partial E(\pi)}\right]\Big[\{[E(p_y)]^2$$

$$+V(p_y)\}\frac{dV(y)}{dx_1} + 2V(p_y)E(y)\frac{dE(y)}{dx_1}\Big] = 0$$

یا

$$E(p_y)\frac{dE(y)}{dx_1} = p_1 - \left[\frac{\partial U}{\partial V(\pi)}\Big/\frac{\partial U}{\partial E(\pi)}\right]\Big[[\{E(p_y)\}^2 + V(p_y)]\frac{dV(y)}{dx_1} + 2V(p_y)E(y)\frac{dE(y)}{dx_1}\Big]$$

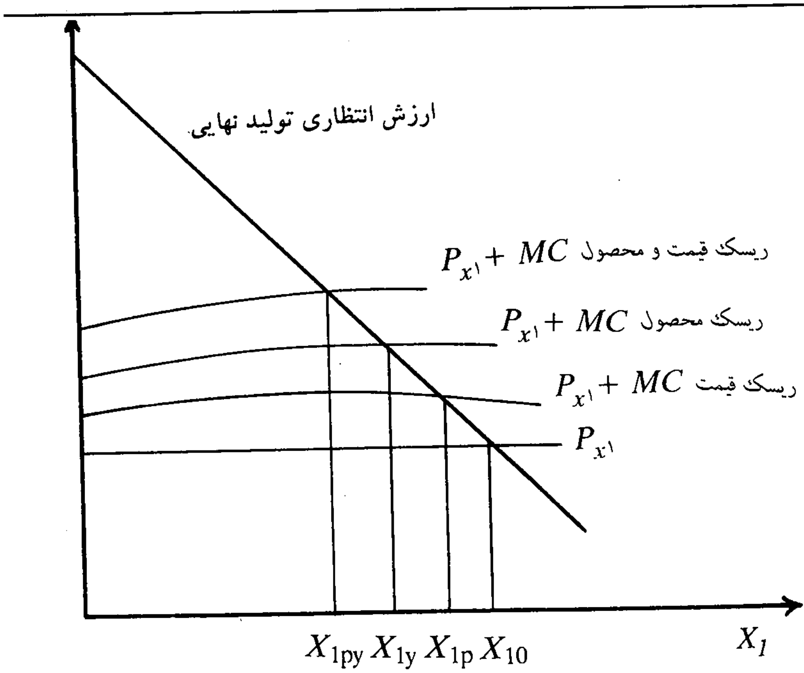
یا

$$E(p_y)\frac{dE(y)}{dx_1} = p_1 + RUS_{VE}\Big[\{[E(p_y)]^2 + V(p_y)\}\frac{dV(y)}{dx_1} + 2V(p_y)E(y)\frac{dE(y)}{dx_1}\Big] \quad (۳۱-۸)$$

رابطه (۸-۳۱) بیان‌گر شرط لازم برای مقدار بهینه X_1 در شرایطی است که هم ریسک محصول و هم ریسک قیمت محصول وجود دارد. این رابطه مستلزم برابری میان «ارزش انتظاری تولید نهایی» (عبارت سمت چپ) و هزینه عامل نهایی مربوط به نهاده X_1 (یعنی P_1) بعلاوه هزینه نهایی ناشی از P_y و y نامطمئن که در هر واحد X_1 بر سود تحمیل می‌شود. از آن جاکه آن بخش از هزینه نهایی غیر از p_1 (جمله دوم عبارت سمت راست) مثبت است، برای یک تصمیم‌گیرنده ریسک گریز، مقدار استفاده بهینه از نهاده در شرایط نامطمئن بودن p_y و y، در مقایسه با شرایط عدم وجود چنین ریسک‌هایی، کوچکتر است. روشن است که برای یک فرد ریسک‌پذیر، مقدار بهینه نهاده در شرایط عدم اطمینان، افزایش می‌یابد.

باید یادآوری کرد که در این جا هیچ توجهی به شرط مرتبه دوم مربوط به حداکثرسازی تابع هدف مطلوبیتی، یعنی $\frac{d^2U}{dx_1^2}$، نکردیم. این شرط، پیچیده است و عدم توجه به آن، آگاهانه بوده است. در کارهای تجربی، این شرایط به خاطر ضرورت استفاده از روشهای تحلیل عددی، بطور خودکار مورد توجه قرار می‌گیرند.

اثر وجود ریسک، تنها در قیمت محصول، تنها در محصول و همزمان در محصول و قیمت محصول، بر روی مقدار بهینه نهادهٔ X_1، بطور هندسی در شکل (۸-۴) نشان داده شده است.



شکل (۸-۴) : سطوح بهینه نهاده X_1 بدون ریسک

شکل (۸-۴) بیان‌گر یکی از چندین امکانی است که مقدار بهینه X_1 بدون ریسک (x_{10}) بزرگتر از مقدار بهینه آن با وجود انواع ریسک است. مقدار بهینه X_1 وقتی هم در y و هم در p_y ریسک وجود دارد، کمتر از همه حالتهای دیگر است (x_{1py}). بنابراین در این شکل داریم :

$$x_{10} > x_{1p} > x_{1y} > x_{1py} \qquad (۸-۳۲)$$

حالتی که در این جا در نظر گرفته شده است، با این فرض بوده است که ریسک محصول بزرگتر از ریسک قیمت می‌باشد. حالتهای دیگری نیز می‌تواند رخ دهد که این فرض کاملاً برعکس باشد.

تعمیم به n متغیر تصمیم‌گیری

بسیار ساده است که این تحلیل را به حالت n متغیر تصمیم‌گیری، وقتی قیدی وجود ندارد و p_y و y، تک‌تک یا هر دو با هم، دارای ریسک هستند، گسترش داد. پیامدهای ورود

ریسک در حالت n متغیر تصمیم‌گیری، دقیقاً همانند حالت یک متغیر است. در این حالت، ما به جای x_1 در (۸-۲۱) ، (۸-۲۶) و (۸-۳۱) ، x_i را جایگزین می‌کنیم. این جایگزینی را می‌توان با توجه به هر یک از حالتهای فقط وجود ریسک در قیمت محصول، فقط وجود ریسک در محصول، یا وجود ریسک در هر دوی محصول و قیمت محصول، انجام داد. در شرایط دنیای واقع، که بیشتر ریسک گریزی یک قاعده است، وجود ریسک منجر به کاهش مقدار بهینه هر کدام از این n متغیر تصمیم‌گیری می‌شود.

منابع برای مطالعه بیشتر

Anderson, J.R., J.L. Dillon and J.B. Hardaker, *Agricultural Decision Analysis*, Iowa State University Press, Ames, Iowa, 1977.

Bernoulli Daniel, "Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk", *Papers of the Imperial Academy of Sciences in Petersburg, V.*, 1938, pp 175–192 (trans. by Loise Sonner, *Econometrica*, **XXII (1)**, 1954, pp 23–36).

Dillon, J.L., *The Analysis of Response in Crop and Livestock Production*, 2nd ed., Pergamon Press, Oxford, 1977, Ch. 4.

Dillon, J.L. and J.R. Anderson, "Allocative Efficiency, Traditional Agriculture and Risk", *American Journal of Agricultural Economics*, **53(1)**, 1971, pp 26–32.

Lutz, Friedrich and vera Lutz, *Theory of Investment of the Firm*, Princeton University Press, Princeton, 1951.

Singh, I.J., "Utility Approach to the Analysis of Risky Farm Decisions", *Indian Journal of Agricultural Economics*, **34**(1), 1979, pp 68–78.

Introduction to The Economics of Agricultural Production

by :

P.L. SANKHAYAN

Translated by :

N. Akbari *M. Renani*

ISBN 964 - 90648 - 3 - 4

شابک ۴ - ۳ - ۹۰۶۴۸ - ۹۶۴

۵۰۰ تومان